ÜBER SPINORDIFFERENTIALGLEICHUNGEN UND DEREN LÖSUNGEN UNTER BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DES KEPLERPROBLEMS

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

am

Fachbereich Mathematik

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Jürgen Mayer-Gürr

aus Laichingen

1970

Über Spinordifferentialgleichungen und deren Lösungen unter besonderer Berücksichtigung des Keplerproblems

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

am

Fachbereich Mathematik

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Jürgen Mayer-Gürr

aus Laichingen

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Referent : Prof. P. Kustaanheimo

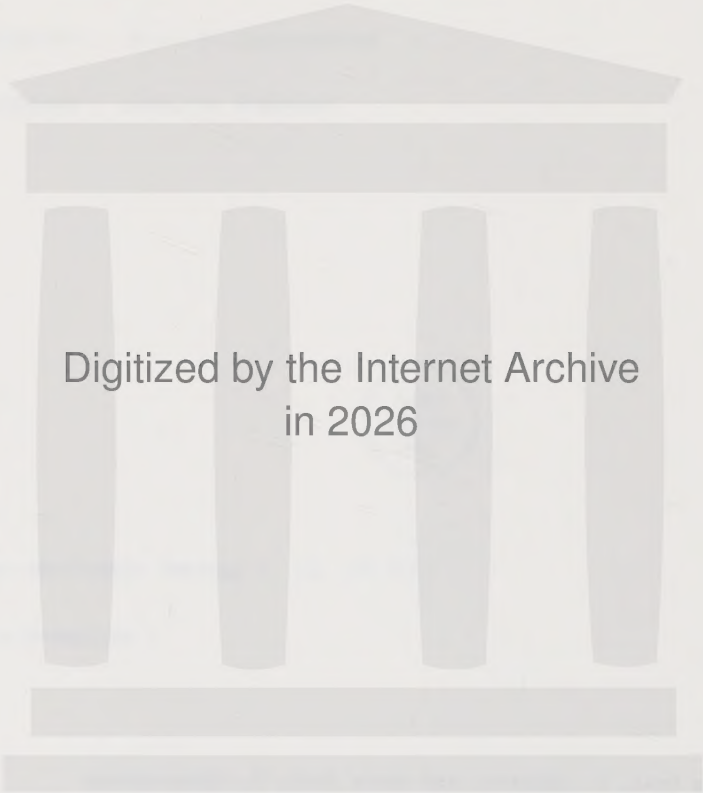
2. Referent : Prof. F. Hinderer

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung : 20. 11. 70

Tag der Promotion :

Herrn Prof. F. Hinderer und Herrn Prof. P. Kustaanheimo möchte ich an dieser Stelle meinen aufrichtigen Dank aussprechen. Ihre Seminare und Arbeiten trugen wesentlich dazu bei, meine mathematischen und astronomischen Kenntnisse zu vertiefen.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546510_0010

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

Vorwort 2

Literatur 4

Bezeichnungen 5

§1 Der Spinorkalkül

1.Axiomatik 6

2.Matrixdarstellung von Vektoren und Spinoren 9

§2 Spinorbewegungsgleichungen

1.Die invariante Spinordifferentialgleichung 12

2.Die allgemeine Spinordifferentialgleichung 16

3.Der Phasensatz 19

§3 Differentiation und Hamilton-Jacobi-Theorie

1.Kovariante Differentiation 24

2.Totale Differentiation 29

3.Lagrangefunktion 30

4.Kanonische Variable 32

5.Hamiltonfunktion 33

6.Integrale 35

7.Poissonklammern 35

§4 Das Keplerproblem

1.Die klassische Keplerbewegung 37

2.Spinorregularisierung der Keplerbewegung 40

§5 Die allgemeine Lagrangefunktion

1.Die Euler-Lagrange-Gleichungen 44

2.Integrale 44

3.Beziehungen zwischen den Integralen 49

4.Kanonische Variable 52

§6 Die Lie-Algebra der erweiterten Keplerbewegung

1.Poissonklammern 57

2.Identifikation der erweiterten Lie-Algebra 58

Lebenslauf 63

V O R W O R T

In seiner grundlegenden Arbeit [3] über die Spinorregularisierung behandelt P. Kustaanheimo das klassische Keplerproblem mit einer neuartigen Methode. Er ordnet nämlich durch die Abbildung $x=2uu^{*}-r$ jedem Spinor u einen Vektor $x\in R^{3}$ zu und betrachtet dann das ganze Problem in Termen von u. Wenn die Schar der Spinoren ebenfalls dreiparametrig wäre, so würde es sich nur um eine Koordinatentransformation handeln. Da ein Spinor aber als ein zweikomponentiger komplexer Vektor angesehen werden kann, haben wir noch einen Parameter, nämlich die Phase des Spinors, frei. Indem er für die Phase gewisse Invarianzeigenschaften verlangt, stellt Kustaanheimo die allgemeinste Spinordifferentialgleichung auf [3], die diese Eigenschaften hat.

Wie ich in § 4 zeige, ist es aber nicht nötig, der Phase irgendwelche Beschränkungen aufzuerlegen. Die Integrale erhält man in dem Fall, in dem der Phase völlige Freiheit gelassen wird, ebenso leicht wie in dem von Kustaanheimo betrachteten Fall, in dem die Phase durch die Nebenbedingung $u'^{*}u-u^{*}u'=0$ festgelegt wird. Der Grund dafür ist denkbar einfach : im Falle der völligen Invarianz der Differentialgleichung gegenüber Phasentransformation handelt es sich um eine reine Koordinatentransformation von x auf drei geeignet gewählte Spinorparameter, man erhält also nur die klassischen Integrale der Keplerbewegung in den neuen Koordinaten.

Wenn man aber die Integration unter obiger Nebenbedingung vornimmt, so hat man die Integrationskonstanten so zu beschränken, daß auch die Lösungen der Spinordifferentialgleichung die Nebenbedingung erfüllen. Wenn sie das nicht tun, so haben wir nicht mehr Lösungen des Keplerproblems, sondern irgend einer anderen Differentialgleichung im x-Raum, denn die zu Grunde liegende Abbildung $x = 2uu^{*} - u^{*}u$ vermittelt ja in jedem Fall eine Abbildung von Spinorkurven auf x-Kurven.

In § 2 untersuche ich den Zusammenhang einer beliebigen Spinordifferentialgleichung mit der oder den zugehörigen x-Differentialgleichungen. Mit dem Phasensatz gebe ich ein Kriterium dafür, wann unter leicht nachprüfbaren Voraussetzungen Spinorlösungen den Lösungen einer ganzen Schar von x-Differentialgleichungen entsprechen. Das ist der Fall, wenn die Spinordifferentialgleichung nicht invariant ist und als Euler-Lagrange-Gleichung aufgefaßt werden kann.

Es ist überhaupt von Interesse, Hamilton-Jacobi-Theorie auch mit Spinoren zu betreiben, dabei kann man die Real- und Imaginärteile der Spinorkomponenten als unabhängige Variable benutzen. Das ist aber wenig elegant und deshalb führe ich in § 3 eine kovariante Differentiation im Spinorpolynomring ein, mit deren Hilfe man die klassischen Formeln der Hamilton-Jacobi-Theorie vollständig auf Spinorpolynome übertragen kann, ohne mit Komponenten rechnen zu müssen,

Natürlich können wir jetzt auch Poissonklammern berechnen, womit wir wiederum Integrale erhalten. Das ist aus folgendem Grund von Interesse : Es war bekannt [1] , daß die klassischen Integrale der Keplerbewegung eine Lie-Algebra bilden, die die Dimension 6 hat und je nach dem Vorzeichen der Energiekonstanten zur Gruppe der vierdimensionalen Rotationen oder zur Lorentzgruppe gehört. Wenn wir nun Spinorintegrale betrachten und beachten, daß wir damit nicht nur die Lösungen des Keplerproblems, sondern einer ganzen Schar von Differentialgleichungen, die die Keplergleichung enthält, erhalten, sollte man eine Lie-Algebra von Spinorintegralen bekommen, die eine echte Erweiterung der schon bekannten ist. In § 6 zeige ich, daß das tatsächlich der Fall ist. Die erweiterte Algebra hat die Dimension 15 und gehört bei positiver Energiekonstanten zur Gruppe der reellen 4×4-Matrizen mit der Determinante 1 .

L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S

[1] K. Bleuler und P. Kustaanheimo :
Vektorielle Methoden in der Quantenmechanik I
Ann. Acad. Sci. Fenn. A. VI. - 1967

[2] P. Cohn :
Lie Groups
Cambridge - 1961

[3] P. Kustaanheimo :
Spinor regularization of the Kepler motion
Ann. Univ. Turkuens. A. I. 73. - 1964

[4] P. Kustaanheimo :
Die Spinordarstellung der energetischen Identitäten der Keplerbewegung. - Math. Forschungsinst. Oberwolfach, Berichte 1,333. - 1965

[5] P. Kustaanheimo :
Spinor Ring Algebra I
Publ. Astronom. Obs. Helsinki N.109. - 1965

[6] P. Kustaanheimo :
Lectures on Celestial Mechanics I
Publ. Astronom. Obs. Helsinki N.117. - 1966

[7] P. Kustaanheimo :
Spinor ring algebra of the complex 2×2 matrices
Information Dept. Appl. Math. Univ. Helsinki N.2. -1967

[8] P. Kustaanheimo und E. Stiefel :
Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization
Journal reine u. angew. Math. 218, 204. - 1965

[9] C.L. Siegel :
Vorlesungen über Himmelsmechanik
Springer Verlag. Berlin - Göttingen - Heidelberg 1956

[10] K. Stumpff
Himmelsmechanik I - Berlin. - 1959

B E Z E I C H N U N G E N

In dieser Arbeit werden die Bezeichnungen von Kustaanheimo [5] verwendet:

1. die kleinen lateinischen Buchstaben a,b,c...q können als Indizes nur die Werte x,y,z annehmen,
2. die kleinen griechischen Buchstaben $\alpha,\beta,\gamma\ldots$ stehen als Indizes für die vier Werte x,y,z,t ,
3. die großen lateinischen Buchstaben A,B... sind als Indizes reserviert für die zwei Werte u,v ,
4. die Indizes r,s bedeuten den hermiteschen bzw. antihermiteschen Teil (Real- bzw. Imaginärteil) einer Größe.

Die Buchstaben r,s,t,u,v,x,y,z sind also reserviert für feste Werte der Indizes und können nicht als freie oder Summationsindizes verwendet werden.

5. Summationskonvention: treten in einem Term freie Indizes doppelt auf, so ist über alle möglichen Werte zu summieren, z.B.

$$u_A s_A = u_u s_u + u_v s_v$$

$$x_a x_a = x_x^2 + x_y^2 + x_z^2 \quad .$$

6. $$\delta_{AB} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } A \neq B \\ 1 & \text{wenn } A = B \end{cases} ,$$

$$\varepsilon_{abc} = \begin{cases} 1 & \text{wenn abc eine gerade Permutation von xyz} \\ -1 & \text{wenn abc eine ungerade Permutation von xyz} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sind das Kronecker- bzw. Permutationssymbol.

Um Skalare deutlicher von anderen Größen abzuheben, werden häufig Klammern gesetzt, obwohl das wegen der Assoziativität im Spinorring nicht nötig wäre,

z.B. $(u^{\cdot}u')uu^{\cdot} = u^{\cdot}u'uu^{\cdot}$.

§ 1 DER SPINORKALKÜL

1. Axiomatik

Der Spinorring $C\left[s_u, s_v, p_u, p_v\right]$ besteht aus allen formalen Polynomen, die aus den vier Symbolen s_A, p_A und den komplexen Zahlen durch eine endliche Anzahl von Additionen und Multiplikationen gebildet werden und folgenden Axiomen genügen: (P, Q, S sind beliebige Spinorpolynome, $\alpha, \beta, 0, 1$ komplexe Zahlen)

I. $(P + Q) + S = P + (Q + S)$

II. $(PQ)S = P(QS)$

III. $P(Q + S) = PQ + PS$

IV. $(Q + S)P = QP + SP$

V. $P + Q = Q + P$

VI. $\alpha P = P\alpha$

VII. $\alpha + \beta$ und $\alpha\beta$ sind gewöhnliche Summe und Produkt der komplexen Zahlen α und β

VIII. $0P = 0, \quad 0 + P = P, \quad 1P = P$

IX. $p_A s_B = \delta_{AB}$

X. $s_u p_u + s_v p_v = 1$

Ein Antiautomorphismus $P \rightarrow P^*$ des Spinorrings wird definiert durch

XI. $(P + Q)^* = P^* + Q^*$

XII. $(PQ)^* = Q^* P^*$

XIII. $s_A^* = p_A$

XIV. $p_A^* = s_A$

XV. α^* ist die zu α konjugiert komplexe Zahl.

Jedes Polynom läßt sich eindeutig zerlegen

$P = P_r + iP_s$

in einen hermiteschen Teil $P_r = \frac{1}{2}(P + P^*)$, $\quad P_r = P_r^*$

und einen antihermiteschen Teil $iP_s = \frac{1}{2}(P - P^*)$, $\quad P_s = P_s^*$.

Außerdem gilt $(P^*)^* = P$.

Ein A u t o m o r p h i s m u s $P \longrightarrow \bar{P}$ des Spinorrings wird definiert durch

XVI. $\overline{(P + Q)} = \bar{P} + \bar{Q}$

XVII. $\overline{PQ} = \bar{P}\bar{Q}$

XVIII. $\bar{s}_u = s_v$, $\bar{s}_v = -s_u$

XIX. $\bar{p}_u = p_v$, $\bar{p}_v = -p_u$

XX. $\bar{\alpha}$ ist die zu α konjugiert komplexe Zahl.

S p i n o r e n heißen die speziellen Polynome u der Form

$u = u_A s_A$.

Die zwei komplexen Zahlen u_A sind die Komponenten des Spinors u. Die Spinoren bilden einen zweidimensionalen komplexen oder einen vierdimensionalen reellen Vektorraum ($u_A = u_{Ar} + iu_{As}$; $u_{Ar}, u_{As} \in R$).

Die aus den Spinoren u gebildeten k o n j u g i e r t e n S p i n o r e n $u^\cdot$ sind dann die speziellen Polynome der Form

$u^\cdot = u^\cdot_A p_A$.

Ihrer Definition nach sind sie also keine Spinoren.

Das Produkt eines konjugierten Spinors $u^\cdot$ mit einem Spinor v definiert ein hermitesches Skalarprodukt

(1) $u^\cdot v = u^\cdot_A p_A v_B s_B = u^\cdot_A v_B \delta_{AB} = u^\cdot_A v_A$.

Insbesondere gilt

$\bar{u}^\cdot u = (-u_v p_u + u_u p_v)(u_u s_u + u_v s_v) = -u_v u_u + u_u u_v = 0$.

V e k t o r e n heißen die speziellen Polynome der Form

$a = a_{AB} s_A p_B$.

Die vier komplexen Zahlen a_{AB} sind die Komponenten in Bezug auf die Basis $s_A p_B$. Wegen Axiom IX. ist das Produkt zweier Vektoren wieder ein Vektor. Ebenso ist der hermitesch konjugierte Vektor $a^\cdot = a^\cdot_{AB} s_B p_A$ ein Vektor. a heißt h e r m i t e s c h , wenn $a = a^\cdot$ und a n t i h e r m i t e s c h , wenn $a = -a^\cdot$, das bedeutet $a_{AB} = (a_{BA})^\cdot$, bzw. $a_{AB} = -(a_{BA})^\cdot$.

Es empfiehlt sich jedoch, eine andere Basis zu benutzen

$$i_x = s_u p_v + s_v p_u$$

$$i_y = -i(s_u p_v - s_v p_u)$$

$$i_z = s_u p_u - s_v p_v$$

$$i_t = s_u p_u + s_v p_v \quad .$$

Die vier neuen Basisvektoren i_a , i_t sind hermitesch. Außerdem gilt folgendes Multiplikationsgesetz

$$i_a i_b = i\, \varepsilon_{abc}\, i_c + \delta_{ab}$$

$$i_a i_t = i_t i_a = i_a \quad .$$

Unter den Komponenten a_α des Vektors a sollen in Zukunft stets die Komponenten in Bezug auf die Basis i_α verstanden werden

$$a = a_\alpha i_\alpha \quad .$$

Hermitesche Vektoren haben dann reelle, antihermitesche rein imaginäre Komponenten.

Die Komponente a_t heißt dann wegen Axiom X. und $i_t = s_u p_u + s_v p_v$ der S k a l a r t e i l von a . Die Vektoren $a = a_t i_t$ können also mit gewöhnlichen Skalaren $(=a_t)$ identifiziert werden.

Nützlich sind die Spinorpolynome

$$\langle = \frac{1}{\sqrt{2}} E^* \qquad \text{(bra-Faktor)}$$

$$\langle = \frac{1}{\sqrt{2}} E \qquad \text{(ket-Faktor)}$$

und $Z = 1 - EE^*$ (Lorentzfaktor) ,

wobei $E = s_u s_v - s_v s_u$ ist. Dann gilt (a,b Vektoren)

(2) $\quad \langle a \rangle = a_t$

(3) $\quad \langle ab \rangle = a_\alpha b_\alpha$

(4) $\quad \langle aZb \rangle = \langle ab \rangle - 2 \langle a \rangle \langle b \rangle = a_a b_a - a_t b_t \quad .$

$\langle aZb \rangle$ heißt das L o r e n t z p r o d u k t der Vektoren a,b. Es ist reell für hermitesche a,b und es stimmt mit $\langle ab \rangle$ überein für skalarfreies a oder b .

2. Matrixdarstellung von Vektoren und Spinoren

Durch die Zuordnungen

$$s_u \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_v \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_u \rightarrow (1\ 0), \quad p_v \rightarrow (0\ 1)$$

erhält man als einfaches Modell für Spinoren komplexe 2×1-Matrizen (Spaltenvektoren) bzw. 1×2-Matrizen für konjugierte Spinoren.

Sei $u = u_A s_A = u_u s_u + u_v s_v$ ein Spinor, dann gelten folgende Identifikationen

$$u = \begin{pmatrix} u_u \\ u_v \end{pmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} -u_v^* \\ u_u^* \end{pmatrix}$$

$$u^* = (u_u^* \quad u_v^*), \quad \bar{u}^* = (-u_v \quad u_u).$$

Ebenso wird der Vektor $a = a_{AB} s_A p_B$ identifiziert mit der komplexen 2×2-Matrix

$$a = \begin{pmatrix} a_{uu} & a_{uv} \\ a_{vu} & a_{vv} \end{pmatrix}.$$

Im Folgenden werden stets für Spinoren und Vektoren und für die diesen zugeordneten Matrizen die gleichen Symbole verwendet.

Addition und Multiplikation im Sinne des Spinorkalküls von Vektoren, Addition von Spinoren, Addition von konjugierten Spinoren, Multiplikation eines Vektors mit einem Spinor, eines konjugierten Spinors mit einem Vektor usw. bedeuten dann die gewöhnliche Matrizenaddition und Multiplikation. Diese Matrixdarstellung umfaßt natürlich nicht den ganzen Spinorring, sondern nur den Teilring der Vektoren und außerdem die Spinoren und konjugierten Spinoren.

Die Basisvektoren i_α haben die Matrixdarstellung

$$i_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad i_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

sind also mit den Pauli-Matrizen identisch.

Dann ist

$$a = a_{AB} s_A p_B = a_\alpha i_\alpha = \begin{pmatrix} a_t + a_z & a_x - i a_y \\ a_x + i a_y & a_t - a_z \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Matrixdarstellung können wir S p u r und D e t e r m i n a n t e eines Vektors einführen

$$\text{Spur}(a) = (a_t+a_z) + (a_t-a_z) = 2a_t = a_{uu} + a_{vv} = a_{AA}$$

$$\det(a) = (a_t+a_z)(a_t-a_z) - (a_x-ia_y)(a_x+ia_y) = a_t^2 - (a_x^2+a_y^2+a_z^2) .$$

Wegen (2),(4) bestehen die Zusammenhänge

$$\text{Spur}(a) = 2\langle a\rangle$$

$$\det(a) = -\langle aZa\rangle .$$

Ein Vektor a heißt s p u r f r e i , wenn Spur (a) = 0 (das ist gleichbedeutend mit skalarfrei).
Ein Vektor a heißt s i n g u l ä r , wenn det (a) = 0 und u n i m o d u l a r , wenn det (a) = 1 .

Seien $u = u_A s_A$, $v = v_B s_B$ Spinoren, dann ist das Produkt $uv^\cdot$ ein Vektor. Wegen Spur (a) = a_{AA} , $uv^\cdot = u_A v^\cdot_B s_A p_B$ und Axiom IX. erhält man die Spur von $uv^\cdot$ einfach durch Vertauschen der Faktoren

(5) $$\text{Spur}(uv^\cdot) = u_A v^\cdot_A = u_A \delta_{AB} v^\cdot_B = v^\cdot_B p_B u_A s_A = v^\cdot u .$$

Weiter ist $uv^\cdot$ singulär, da

$$\det(uv^\cdot) = u_u v^\cdot_u u_v v^\cdot_v - u_u v^\cdot_v u_v v^\cdot_u = 0 .$$

V e k t o r e n d e s R^3

Sei $x = (x_x, x_y, x_z)$ ein Vektor des dreidimensionalen reellen euklidischen Raumes R^3 mit auf ein kartesisches Koordinatensystem bezogenen Koordinaten x_a . Dann können wir diesem Vektor $x \in R^3$ eine hermitesche spurfreie Matrix, und damit einen Vektor im Sinne des Spinorkalküls zuordnen durch

$$x = x_a i_a = \begin{pmatrix} x_z & x_x - ix_y \\ x_x + ix_y & -x_z \end{pmatrix} .$$

Das euklidische Skalarprodukt (x,y) zweier Vektoren $x,y \in R^3$ erhält man dann wegen (3),(4) und der Spurfreiheit von x,y durch

$$(x,y) = \langle xZy\rangle \qquad \text{oder} \qquad (x,y) = \langle xy\rangle .$$

Die dem V e k t o r p r o d u k t

$$x \times y = (x_y y_z - x_z y_y,\ x_z y_x - x_x y_z,\ x_x y_y - x_y y_x)$$

zugeordnete hermitesche spurfreie Matrix ist bis auf den Faktor $\frac{1}{2i}$ gleich dem Kommutator der Matrizen x und y

$$(6) \qquad x \times y = \frac{1}{2i}(xy - yx) \quad .$$

Auch hier wurden die gleichen Symbole für Vektoren des R^3 und die ihnen zugeordneten Spinorpolynome verwendet.

§ 2 SPINORBEWEGUNGSGLEICHUNGEN

1. Die invariante Spinordifferentialgleichung

Die Abbildung $u \longrightarrow x$

$$x = 2uu^* - u^*u \tag{7}$$

ordnet jedem Spinor u eine hermitesche spurfreie Matrix und damit einen Vektor $x \in R^3$ zu.
In Komponenten x_a und u_A lautet (7)

$$\begin{aligned} x_x &= u_u u_v^* + u_v u_u^* \\ x_y &= i\,(u_u u_v^* - u_v u_u^*) \\ x_z &= u_u u_u^* - u_v u_v^* \end{aligned} \tag{8}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} x_x^2+x_y^2+x_z^2 = -\det(x) &= (u_u u_u^* - u_v u_v^*)^2 + 4\, u_u u_u^* u_v u_v^* \\ &= (u_u u_u^* + u_v u_v^*)^2 = (u^*u)^2 \end{aligned}$$

also, da $u^*u \geq 0$

$$r = \sqrt{x_x^2+x_y^2+x_z^2} = u^*u \quad . \tag{9}$$

Die Abbildung (7) ist eine Abbildung der vierparametrigen Schar der Spinoren auf die dreiparametrige Schar der Vektoren des R^3, sie ist also nicht umkehrbar. In der Tat haben u und $e^{i\gamma}u$ (γ beliebig reell) die gleichen Bilder x.
Bei Zerlegung der Spinorkomponente u_A in Betrag r_A und Argument α_A, $u_A = r_A\, e^{i\alpha_A}$ wird die Art der Abhängigkeit zwischen x und u besonders deutlich. (8) und (9) lauten dann

$$\begin{aligned} x_x &= 2\, r_u r_v \cos(\alpha_u - \alpha_v) \\ x_y &= -2\, r_u r_v \sin(\alpha_u - \alpha_v) \\ x_z &= r_u^2 - r_v^2 \\ r &= r_u^2 + r_v^2 \quad . \end{aligned}$$

Es besteht also eine umkehrbar eindeutige Abbildung zwischen x und den drei Variablen r_u, r_v, $\alpha = \alpha_u - \alpha_v \pmod{2\pi}$

$$r_u = \sqrt{\tfrac{1}{2}(r+x_z)}$$

$$r_v = \sqrt{\tfrac{1}{2}(r-x_z)}$$

$$\cos(\alpha_u - \alpha_v) = \frac{x_x}{\sqrt{x_x^2+x_y^2}} \quad , \quad \sin(\alpha_u - \alpha_v) = -\frac{x_y}{\sqrt{x_x^2+x_y^2}} \quad .$$

Unter der P h a s e β eines Spinors

$$u = \begin{pmatrix} r_u\, e^{i\alpha_u} \\ r_v\, e^{i\alpha_v} \end{pmatrix}$$

verstehen wir die Variable

$$\beta = \tfrac{1}{2}(\alpha_u + \alpha_v) \quad .$$

Sie wird also gezählt gegenüber einem Spinor $u^o = \begin{pmatrix} r_u^o\, e^{i\alpha_u^o} \\ r_v^o\, e^{i\alpha_v^o} \end{pmatrix}$ mit der Phase $\frac{1}{2}(\alpha_u^o + \alpha_v^o) = 0$.

Diese Definition hat zur Folge, daß der Spinor $u = e^{i\beta}\, u^o$ die Phase β hat, da $\frac{1}{2}(\alpha_u^o + \beta + \alpha_v^o + \beta) = \beta$.

Die vier unabhängigen Variablen

$$(10) \qquad r_u \ , \ r_v \ , \ \alpha = \alpha_u - \alpha_v \ , \ \beta = \tfrac{1}{2}(\alpha_u + \alpha_v)$$

können als Parameter der Spinorebene benutzt werden, die ersten drei davon gleichzeitig auch als Parameter des x-Raumes. Der vierte Spinorparameter β , die Phase also, hat keinerlei Einfluß auf x .

Sei $u = \{u(t)\}$ eine zweimal stetig differenzierbare Kurve in der Spinorebene, so vermittelt (7) eine Abbildung dieser Kurve auf eine ebenfalls zweimal stetig differenzierbare Kurve im x-Raum. Umgekehrt wird eine Kurve im x-Raum beschrieben durch eine ganze Schar von Kurven in der Spinorebene! Zwei Spinorkurven stellen die gleiche x-Kurve dar, wenn sie sich nur durch einen beliebig von t

abhängigen Phasenfaktor $e^{i\gamma(t)}$, $\gamma(t)$ reell, unterscheiden.
$\tilde{u} = \{\tilde{u}(t)\}$ und $u = \{e^{i\gamma(t)}\tilde{u}(t)\}$ stellen die gleiche x-Kurve dar.

Durch Differentiation von (7) nach t erhält man ($x' = \frac{dx}{dt}$, $u' = \frac{du}{dt}$)

(11) $x' = 2u'u^* + 2uu'^* - u'^*u - u^*u'$

(12) $x'' = 2u''u^* + 4u'u'^* + 2uu''^* - 2u'^*u' - u''^*u - u^*u''$.

Durch Rechtsmultiplikation von (12) mit u folgt

(13) $2ru'' + 4(u'^*u)u' + (u''^*u - u^*u'')u - 2(u'^*u')u - x''u = 0$,

oder wegen $4u'^*u = 2r' + 2(u'^*u - u^*u')$

(14) $2ru'' + 2r'u' - 2(u'^*u')u + (u''^*u - u^*u'')u + 2(u'^*u - u^*u')u' - x''u = 0.$

Sei nun

(15) $x'' = f(x,x')$

die Differentialgleichung für eine Bewegung im x-Raum, dann erhalten wir die entsprechende Spinordifferentialgleichung, indem wir f in (14) einsetzen und noch x und x' gemäß (7), (11) durch die entsprechenden Ausdrücke in u und u' ersetzen.
Für diesen Substitutionsprozeß sind folgende Identitäten nützlich

(16) $xu = ru$

(17) $(xx' - x'x) = 4\,uu^*(u^*u' - u'^*u) + 4r(uu'^* - u'u^*)$

und damit

(18) $(xx' - x'x)u = 4r((u^*u')u - ru')$

(19) $x'_a x'_a = x'^2_x + x'^2_y + x'^2_z = 4r\,u'^*u' + (u'^*u - u^*u')^2$.

Gleichung (14) bleibt invariant unter der Substitution

$$u \longrightarrow e^{i\gamma(t)}u$$

$$u' \longrightarrow e^{i\gamma}u' + i\gamma' e^{i\gamma}u$$

$$u'' \longrightarrow e^{i\gamma}u'' + 2i\gamma' e^{i\gamma}u' - (\gamma')^2 e^{i\gamma}u + i\gamma'' e^{i\gamma}u$$

gemäß der Tatsache, daß u durch (7) nur bis auf einen Phasenfaktor $e^{i\gamma}$ bestimmt ist. Deshalb nennen wir (14) die i n v a r i a n t e Spinordifferentialgleichung.

Durch Zerlegung der zwei Komponenten von (14) in Real- und Imaginärteil erhalten wir ein gekoppeltes System von vier Differentialgleichungen 2.Ordnung. Wegen der Phaseninvarianz können diese vier Gleichungen aber nicht unabhängig voneinander sein. Das wird ganz deutlich, wenn man u nach den Variablen (10) zerlegt. Die Phase β wird durch (14) nicht bestimmt, denn (14) ist ja nichts anderes als die Differentialgleichung (15) , nur ausgeführt in den Variablen r_u, r_v, α statt x_a .

In den Gleichungen (13),(14) kommt u'' implizit vor. Es ist grundsätzlich nicht möglich, diese in der expliziten Form $u'' = g(u,u')$ entsprechend (15) zu schreiben. Denn wäre das möglich, müßte man zunächst das in (13) vorkommende u'' eliminieren. Das geschieht am besten so, indem man (13) von links mit u^* multipliziert und dann die hermitesch konjugierte Gleichung

$$2r(u''^*u) + 4(u'^*u)(u^*u') - r(u''^*u - u^*u'') - 2r(u'^*u') - u^*x''u = 0$$

mit $\frac{u}{r}$ multipliziert und von (13) subtrahiert

$$2ru'' + 4(u'^*u)u' + (u''^*u - u^*u'')u - 2(u'^*u')u - x''u$$

$$-2(u''^*u)u - \frac{4}{r}(u'^*u)(u^*u')u + (u''^*u - u^*u'')u + 2(u'^*u')u + \frac{1}{r}(u^*x''u)u = 0$$

und dann noch etwas umgruppiert

$$(r - uu^*)(2u'' + \frac{4}{r}(u'^*u)u' - \frac{1}{r}x''u) = 0 \quad .$$

Diese Gleichung wäre nach u'' auflösbar, wenn die Matrix $r - uu^*$ eine Inverse hätte. Das ist aber nicht der Fall, da $r - uu^*$ den Eigenspinor u zum Eigenwert 0 hat

$$(r - uu^*)u = ru - (u^*u)u = 0 = 0u \quad ,$$

und damit seine Determinante verschwindet, [5] .

2. Die allgemeine Spinordifferentialgleichung

Wir betrachten nun eine beliebige Spinordifferentialgleichung 2.Ordnung

$$g(u,u',u'') = 0 \quad . \tag{20}$$

Wenn sie nicht wie die invariante Differentialgleichung (14) entartet ist, gibt es acht Integrationskonstanten. Die Lösungen $\{u(t)\}$ bilden dann eine achtparametrige Schar. Die Phase ist nicht mehr unbestimmt, sondern wird von der Differentialgleichung (20) festgelegt. Trotzdem vermittelt die Abbildung (7) weiterhin eine Abbildung der Spinorkurven $\{u(t)\}$ in Kurven des x-Raumes. Die achtparametrige Schar von Spinorkurven braucht dabei aber nicht in eine ebenfalls achtparametrige Schar von x-Kurven übergehen, die Zahl der x-Parameter kann sich verringern. Folgende Beispiele sollen die verschiedenen Möglichkeiten veranschaulichen.

Beispiel I

Die Differentialgleichung

$$2ru'' + 2r'u' - 2(u'^*u')u + 2(u'^*u - u^*u')u' - \frac{r'}{r}(u'^*u - u^*u')u = 0 \tag{21}$$

ist invariant gegenüber der Phasentransformation $u \longrightarrow e^{i\gamma}u$, wobei γ aber jetzt nur eine reelle Konstante ist und nicht mehr beliebig von der Zeit abhängen darf. Damit ist γ schon eine Integrationskonstante. Auf die x-Bewegung hat sie aber keinen Einfluß, so daß die Schar der x-Kurven höchstens siebenparametrig sein kann. In Wirklichkeit hat sie aber nur sechs Parameter.

Das sieht man, indem man (21) mit u^* von links multipliziert und dann die hermitesch konjugierte Gleichung subtrahiert, was

$$(22) \qquad 2r(u^*u'' - u''^*u) + 2r'(u^*u' - u'^*u) = 0$$

ergibt. Also ist $2r(u'^*u - u^*u')$ ein Integral

$$(23) \qquad 2r(u'^*u - u^*u') = 2iP \quad ,$$

P ist die reelle Integrationskonstante.

Löst man (22) nach $\frac{r'}{r}(u'^*u - u^*u')$ auf und setzt dies in (21) ein, so erhält man die invariante Differentialgleichung (14) für $x'' = 0$, also für die geradlinige Bewegung, deren Lösungen aber sechsparametrig sind. Das Integral (23) legt die Phase zusammen mit dem Integral γ vollständig fest. Wir haben eine zweiparametrige Schar von Phasen, die keinen Einfluß auf die x-Bewegung hat. Dagegen hängt die Phase sehr wohl von der x-Bewegung ab, denn (23) bedeutet in den Variablen (10)

$$(24) \qquad -2ir(r_u^2\alpha_u' + r_v^2\alpha_v') = -ir((r_u^2+r_v^2)(\alpha_u'+\alpha_v') + (r_u^2-r_v^2)(\alpha_u'-\alpha_v'))$$

also $r(2r\beta' + x_z\alpha') = \text{const.}$,

d.h. β' ist von r, x_z und $\alpha' = \dfrac{x_y x_x' - x_x x_y'}{x_x^2 + x_y^2}$ abhängig.

Beispiel II

Die Differentialgleichung

$$(25) \qquad 2ru'' + 2r'u' - 2(u'^*u')u = 0$$

hat die gleichen Integrale γ und (23) wie die Spinordifferentialgleichung (21) . Die Phase wird also auf die gleiche Weise wie dort festgelegt. Hier aber erhalten wir eine siebenparametrige Schar von x-Kurven, oder, was dasselbe ist, die Lösungen nicht nur einer einzigen x-Differentialgleichung (wie $x''=0$ in Beispiel I) , sondern einer einparametrigen Schar von Differentialgleichungen 2.Ordnung.

Um dies zu zeigen, schreiben wir (25) mit Hilfe der auch hier gültigen Gleichung (22) in der Form

$$2ru'' + 2r'u' - 2(u'\cdot u')u + (u''\cdot u - u\cdot u'')u + 2(u'\cdot u - u\cdot u')u' + \frac{r'}{r}(u'\cdot u - u\cdot u')u - 2(u'\cdot u - u\cdot u')u' = 0 .$$

Das ist von der Form (14) , wenn die letzten beiden Terme $-x''u$ bedeuten. Wegen des Integrals (23) können wir diese beiden Terme umformen zu

$$\frac{r'}{r^2} iPu - \frac{2iP}{r} u'$$

und weiter mit Hilfe der Identitäten (16),(18) zu

$$-\frac{P}{r^3}\frac{1}{2i}(xx' - x'x)u + \frac{r'}{r^2} iPu - \frac{2iP}{r^2}(u\cdot u')u$$

$$= -\frac{P}{r^3}\frac{1}{2i}(xx' - x'x)u + \frac{iP}{r^2}(u'\cdot u - u\cdot u')u$$

$$= -\frac{P}{r^3}\frac{1}{2i}(xx' - x'x)u - \frac{P}{r^4} xu \quad .$$

Also gilt

$$x'' = \frac{P^2}{r^4} x + \frac{P}{r^3} x \times x' \quad , \tag{26}$$

was die einparametrige Schar von x-Differentialgleichungen ist, die durch (25) bestimmt wird. Der Scharparameter P ist gleichzeitig die Integrationskonstante, die die Phase festlegt.

3. Der Phasensatz

Man kann nun nach Kriterien fragen, die es gestatten, festzustellen, welcher Fall bei einer gegebenen allgemeinen Spinordifferentialgleichung vorliegt. Dafür ist folgender Satz nützlich.

Satz (Phasensatz)
Sei $g(u,u',u'') = 0$ eine beliebige Spinordifferentialgleichung 2. Ordnung (invariant oder nicht) und gebe es eine in den Komponenten u_{Ar}, u_{As}, u'_{Ar}, u'_{As} von u und u' analytische Funktion $L(u,u')$, derart, daß die vier Komponenten von $g(u,u',u'') = 0$ die Euler-Lagrange-Gleichungen zur Lagrangefunktion $L(u,u')$ sind, und sei die über die Abbildung $x = 2uu^{\cdot} - r$ vermittelte Bewegung im x-Raum unabhängig von der Phase β, dann ist auch die Phase von der x-Bewegung unabhängig.

Für das Beispiel II kann man leicht zeigen, daß eine Lagrangefunktion existiert (nämlich $L(u,u') = 2ru'^{\cdot}u'$), andererseits ist die Phase wegen der auch hier gültigen Gleichung (24) von x abhängig, so daß nach dem Satz die x-Bewegung von der Phase abhängig sein muß. Diese Abhängigkeit gibt (26). Trivial ist der Satz für invariante Spinordifferentialgleichungen, da hier die Phase völlig beliebig ist und daher auch nicht von x abhängen kann.

Beweis des Satzes

Da Euler-Lagrange-Gleichungen bei Transformation der Variablen wieder in Euler-Lagrange-Gleichungen übergehen [9], benutzen wir zweckmäßigerweise gleich die Variablen (10) und setzen

$$q_1 = r_u \,, \quad q_2 = r_v \,, \quad q_3 = \alpha \,, \quad q_4 = \beta \quad .$$

Nach Voraussetzung des Satzes ist $g(u,u',u'') = 0$ nur eine andere Schreibweise für die vier Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \,, \qquad i = 1,2,3,4 \quad .$$

Da L analytisch ist, läßt es sich in eine Potenzreihe nach $q_4 = \beta$, $q_4' = \beta'$ entwickeln

$$L = a_{00} + a_{11}\beta + a_{12}\beta' + a_{21}\beta^2 + a_{22}\beta\beta' + a_{23}\beta'^2 + \ldots$$

$$\ldots + a_{n1}\beta^n + a_{n2}\beta^{n-1}\beta' + \ldots + a_{nn}\beta(\beta')^{n-1} + a_{n,n+1}\beta'^n + \ldots$$

Die Koeffizienten a_{00} und a_{kl} ($k = 1,2\ldots$; $l = 1 \ldots k+1$) hängen nur von q_i und q_i' ($i = 1,2,3$), nicht aber von β , β' ab. Dann bilden wir für $i = 1,2,3$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i'} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad ,$$

wobei wir zur Vereinfachung der Schreibweise definieren

$$da_{kl} = \frac{\partial}{\partial q_i} a_{kl} \quad , \quad d'a_{kl} = \frac{\partial}{\partial q_i'} a_{kl} \quad , \quad Td'a_{kl} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q_i'} a_{kl} \; .$$

Dann ergibt sich

$$(27) \qquad 0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i'} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = (Td'a_{00} - da_{00}) +$$

$$+\beta(Td'a_{11} - da_{11}) + \beta'(d'a_{11} + Td'a_{12} - da_{12}) + \beta'' d'a_{12}$$

$$+\beta^2(Td'a_{21} - da_{21}) + \beta\beta'(2d'a_{21} + Td'a_{22} - da_{22})$$

$$+\beta'^2(d'a_{22} + Td'a_{23} - da_{23}) + \beta\beta'' d'a_{22} + \beta'\beta'' 2d'a_{23}$$

$$+\beta^3(Td'a_{31} - da_{31}) + \beta^2\beta'(3d'a_{31} + Td'a_{32} - da_{32})$$

$$+\beta\beta'^2(2d'a_{32} + Td'a_{33} - da_{33}) + \beta'^3(d'a_{33} + Td'a_{34} - da_{34})$$

$$+\beta^2\beta'' d'a_{32} + \beta\beta'\beta'' 2d'a_{33} + \beta'^2\beta'' d'a_{34} + \ldots$$

$$\ldots + \beta^n(Td'a_{n1} - da_{n1}) + \beta^{n-1}\beta'(n\, d'a_{n1} + Td'a_{n2} - da_{n2})$$

$$+\beta^{n-1}\beta'^2(n-1)d'a_{n2} + Td'a_{n3} - da_{n3}) + \ldots + \beta(\beta')^{n-1}(2d'a_{nn-1} + Td'a_{nn} - da_{nn})$$

$$+\beta'^n(d'a_{nn} - Td'a_{n,n+1} - da_{n,n+1}) + \beta^{n-1}\beta'' d'a_{n2} + \beta^{n-2}\beta'\beta'' 2d'a_{n3} + \ldots$$

$$\ldots + \beta(\beta')^{n-2}\beta''(n-1)d'a_{nn} + (\beta')^{n-1}\beta''\, n\, d'a_{n,n+1} + \ldots$$

Da die q_i (i = 1,2,3) gleichzeitig Koordinaten der x-Bewegung sind, diese aber nach Voraussetzung nicht von der Phase abhängen soll, müssen in (27) alle Koeffizienten der Produkte von β , β', β'' verschwinden. Für die Koeffizienten von β'' folgt daher

$$d'a_{nk} = 0 \quad , n \geq 1 \quad , k = 2, \ldots , n+1 \quad ,$$

also sind diese a_{nk} nur von q_i , nicht aber von q_i' abhängig.

$$(28) \qquad a_{nk} = a_{nk}(q_i) \quad , n \geq 1 \quad , k = 2,\ldots,n+1 \quad .$$

Die Koeffizienten der Potenzen, die β' , nicht aber β'' enthalten, haben drei Summanden, wovon der mittlere verschwindet, da mit $d'a_{nk} = 0$ auch $Td'a_{nk} = 0$ ist. Mit der einzigen Ausnahme beim Koeffizienten von $\beta^{n-1}\beta'$ verschwinden auch die ersten Summanden, so daß sich

$$da_{nk} = 0 \quad , n \geq 2 \quad , k = 3, \ldots , n+1$$

ergibt, d.h. diese a_{nk} sind unabhängig von q_i .
Mit (28) zusammen gilt also

$$(29) \qquad a_{nk} = \text{const.} \quad , n \geq 2 \quad , k = 3, \ldots , n+1 \quad .$$

Der Koeffizient von $\beta^{n-1}\beta'$ liefert

$$n\, d'a_{n1} = da_{n2} \quad ,$$

also enthält a_{n1} wegen (28) die q_i' nur in der ersten Potenz

$$(30) \qquad a_{n1} = a^{o}_{n1} + \sum_{i=1}^{3} a^{i}_{n1}(q)\, q_i' = a^{o}_{n1} + b_{n1} \quad , n \geq 1 \quad ,$$

und es gilt

$$(31) \qquad n\, a^{i}_{n1}(q) = \frac{\partial a_{n2}}{\partial q_i} \quad , \quad i = 1,2,3 \quad .$$

Daraus erhält man durch Differentiation nach q_k und durch Vertauschen von i und k

$$(32) \qquad \frac{\partial a^{i}_{n1}}{\partial q_k} = \frac{\partial a^{k}_{n1}}{\partial q_i} \quad .$$

Multiplizieren wir (31) mit q_i' und summieren über i, so ergibt sich rechts die zeitliche Ableitung von a_{n2}

$$n \sum_{i=1}^{3} a_{n1}^{i} q_i' = \frac{d}{dt} a_{n2} ,$$

also

$$n\, b_{n1} = \frac{d}{dt} a_{n2} . \tag{33}$$

Es bleibt noch der Koeffizient von β^n, mit (30) folgt

$$\frac{d}{dt} a_{n1}^{i} - \frac{\partial a_{n1}}{\partial q_i} = 0 , \quad i = 1,2,3$$

und weiter

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial a_{n1}^{i}}{\partial q_k} q_k' - \left(\frac{\partial a_{n1}^{o}}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial a_{n1}^{k}}{\partial q_i} q_k' \right) = 0 .$$

Bei Benutzung von (32) folgt $\frac{\partial a_{n1}^{o}}{\partial q_i} = 0$, also

$$a_{n1}^{o} = \text{const.} . \tag{34}$$

Nun definieren wir

$$l(\beta,\beta') = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n1}^{o} \beta^n + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=3}^{n+1} a_{nk} \beta^{n-(k-1)} (\beta')^{k-1} .$$

Wegen der Konstanz der Koeffizienten (29),(34) hängt l nicht von q oder q' ab.
Sammeln wir alle Summanden, so bekommen wir folgenden Ausdruck für die Lagrangefunktion $L(u,u')$

$$L = a_{00} + l(\beta,\beta') + \sum_{n=1}^{\infty} (b_{n1} \beta^n + a_{n2} \beta^{n-1} \beta') .$$

Hierin ist die letzte Summe aber wegen (33) die zeitliche Ableitung der Funktion

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n2} \beta^n \quad ,$$

eine solche hat aber bekanntlich auf die Euler-Lagrange-Gleichung keinen Einfluß.

Es wird also die Phase β schon durch die von q_i $(i = 1,2,3)$ und damit von x unabhängige Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \beta'} - \frac{\partial l}{\partial \beta} = 0$$

festgelegt. Damit ist der Satz bewiesen.

§ 3 ERWEITERUNG DES SPINORKALKÜLS UND HAMILTON-JACOBI-THEORIE

1. Kovariante Differentiation

Es ist sehr zweckmäßig, den Spinorkalkül durch Einführung einer partiellen Differentiation zu erweitern. Mit Hilfe dieses Kalküls vermeidet man ein lästiges Rechnen in Komponenten. Außerdem kann man damit die Hamilton-Jacobi-Theorie leicht auf Spinoren übertragen. Die Einführung der Differentiation nach Spinoren und konjugierten Spinoren geschieht analog zur Bildung der kovarianten Differentiation im gewöhnlichen Tensorkalkül.

Wir definieren die kovariante Differentiation nur für Spinorpolynome in der Normalform [5] ; mit Hilfe des Axioms IX. kann man jedes Spinorpolynom in die Normalform bringen, in welcher kein p_A vor einem s_B steht. Die kovariante Differentiation läßt sich aber genau so für allgemeine Polynome definieren.

Alle Summanden von F , einem Spinorpolynom in der Normalform, sind jetzt von der Gestalt

$$f = f_{B..C\dot{D}..\dot{E}}\ s_B \cdot\cdot s_C p_D \cdot\cdot p_E \quad ,$$

hierbei sind die zu den p_A gehörigen Indizes mit Punkten versehen worden ; eine Schreibweise, die sich als zweckmäßig erweisen wird.

Wir definieren nun die partielle Differentiation des Spinorpolynoms F nach u und u^* gliedweise durch

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f_{B..C\dot{D}..\dot{E}}}{\partial u_A}\ s_B \cdot\cdot s_C p_D \cdot\cdot p_E p_A \tag{35}$$

bzw.

$$\frac{\partial f}{\partial u^*} = \frac{\partial f_{B..C\dot{D}..\dot{E}}}{\partial u_{\dot{A}}}\ s_A s_B \cdot\cdot s_C p_D \cdot\cdot p_E \quad . \tag{36}$$

In beiden Fällen erhöht sich der Grad jedes Summanden um eins, bei Differentiation nach u durch Hinzufügen von p_A, welches hinter die übrigen p_C gesetzt wird ; und bei Differentiation nach $u^\cdot$ durch Hinzufügen von s_A, welches vor alle anderen s_B zu setzen ist.

Diese Festlegung der Stellung der s_A, p_A hat zur Folge, daß für hermitesche Polynome f gilt

$$\frac{\partial f}{\partial u^\cdot} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^\cdot \quad .$$

K o n s i s t e n z g e g e n ü b e r
K o o r d i n a t e n t r a n s f o r m a t i o n

Wir zeigen nun, daß die Ableitungen nach den gleichen Vorschriften zu bilden sind, wenn man durch eine unitäre Transformation in der Spinorebene zu einem gestrichenen Koordinatensystem übergeht. Die zunächst beliebige nichtsinguläre Matrix $a = (a_{AB})$ definiere eine Transformation der Spinorebene durch

$$s'_A = a_{AB}\, s_B$$

$$p'_A = (a_{AB})^\cdot p_B \quad .$$

Die Umkehrtransformation ist

$$s_A = b_{AB}\, s'_B$$

$$p_A = (b_{AB})^\cdot p'_B \quad ,$$

wobei a und b verknüpft sind durch

$$a_{AB}\, b_{BC} = \delta_{AC} \quad . \tag{37}$$

Dann folgt weiter

$$u_B = a_{AB}\, u'_A \quad , \qquad u^\cdot_B = (a_{AB})^\cdot u'^\cdot_A$$

$$u'_B = b_{AB}\, u_A \quad , \qquad u'^\cdot_B = (b_{AB})^\cdot u^\cdot_A \quad .$$

Die Koeffizienten eines Spinorpolynoms transformieren sich dann gemäß

$$(38) \qquad f'_{F..G\dot{H}..\dot{J}} = f_{B..C\dot{D}..\dot{E}}\ b_{BF} \cdot\cdot\ b_{CG}(b_{DH})^{\cdot} \cdot\cdot\ (b_{EJ})^{\cdot} \quad .$$

Hier sieht man auch den Grund für das Punktieren der zu den p_A gehörigen Indizes : zu ihnen gehören Transformationen mit $b^{\cdot}$, während die zu den s_A gehörigen Indizes mit b transformiert werden.

Wendet man die allgemeine Transformationsformel (38) auf die speziellen Polynome (35),(36) an, so ergibt sich

$$\left(\frac{\partial f_{F..G\dot{H}..\dot{J}}}{\partial u_K}\right)' = \frac{\partial f_{B..C\dot{D}..\dot{E}}}{\partial u_A}\ b_{BF} \cdot\cdot\ b_{CG}(b_{DH})^{\cdot} \cdot\cdot\ (b_{EJ})^{\cdot}(b_{AK})^{\cdot}$$

bzw.

$$\left(\frac{\partial f_{F..G\dot{H}..\dot{J}}}{\partial u^{\cdot}_K}\right)' = \frac{f_{B..C\dot{D}..\dot{E}}}{u^{\cdot}_A}\ b_{AK}\ b_{BF} \cdot\cdot\ b_{CG}(b_{DH})^{\cdot} \cdot\cdot\ (b_{EJ})^{\cdot} \quad .$$

Differentiation von (38) nach u_K bzw. $u^{\cdot}_K$ und Benutzung von

$$\frac{\partial u_A}{\partial u'_K} = a_{KA} \quad , \text{ bzw. } \quad \frac{\partial u^{\cdot}_A}{\partial u^{\cdot\prime}_K} = (a_{KA})^{\cdot}$$

liefert

$$\frac{\partial f'_{F..G\dot{H}..\dot{J}}}{\partial u'_K} = \frac{\partial f_{B..C\dot{D}..\dot{E}}}{\partial u_A}\ b_{BF} \cdot\cdot\ b_{CG}(b_{DH})^{\cdot} \cdot\cdot\ (b_{EJ})^{\cdot} a_{KA}$$

bzw.

$$\frac{\partial f'_{F..G\dot{H}..\dot{J}}}{\partial u^{\cdot\prime}_K} = \frac{\partial f_{B..C\dot{D}..\dot{E}}}{\partial u^{\cdot}_A}\ (a_{KA})^{\cdot} b_{BF} \cdot\cdot\ b_{CG}(b_{DH})^{\cdot} \cdot\cdot\ (b_{EJ}) \quad .$$

Wir haben also

$$\frac{\partial f'_{F..G\dot{H}..\dot{J}}}{\partial u'_K} = \left(\frac{\partial f_{F..G\dot{H}..\dot{J}}}{\partial u_K} \right)'$$

$$\frac{\partial f'_{F..G\dot{H}..\dot{J}}}{\partial u'^{\cdot}_K} = \left(\frac{\partial f_{F..G\dot{H}..\dot{J}}}{\partial u^{\cdot}_K} \right)' \quad ,$$

wenn

$$a_{KA} = (b_{AK})^{\cdot} \quad .$$

Ein Vergleich mit (37) zeigt, daß a und damit auch b dann u n i t ä r $(a^{-1} = a^{\cdot})$ sein müssen, um die Kovarianz zu garantieren. In diesem Fall bleibt auch das hermitesche Skalarprodukt (1) erhalten, ebenso wie die Beziehungen $p_A s_B = \delta_{AB}$ (Axiom IX.) sowie $s_A p_A = 1$ (Axiom X.) . Die Vektorskalarprodukte (3),(4) sind bei diesen Transformationen ebenso invariant [5] .

Da $\bar{u}$ ebenfalls ein Spinor ist, enthält die Definition (35) auch eine Differentiation nach $\bar{u}$, entsprechendes gilt für $\bar{u}^{\cdot}$.

Beispiel

Sei $f = r = u^{\cdot}_A u_A = u^{\cdot} u = \bar{u}^{\cdot} \bar{u}$, dann ist

$$\frac{\partial r}{\partial u} = \frac{\partial (u^{\cdot}_u u_u + u^{\cdot}_v u_v)}{\partial u_A} p_A = u^{\cdot}_A p_A = u^{\cdot} \quad ,$$

$$\frac{\partial r}{\partial u^{\cdot}} = \frac{\partial (u^{\cdot}_U u_u + u^{\cdot}_v u_v)}{\partial u^{\cdot}_A} s_A = u_A s_A = u \quad ,$$

$$\frac{\partial r}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial r}{\partial (-u^{\cdot}_v)} p_u + \frac{\partial r}{\partial (u^{\cdot}_u)} p_v = -u_v p_u + u_u p_v = \bar{u}^{\cdot} \quad ,$$

$$\frac{\partial r}{\partial \bar{u}^{\cdot}} = \frac{\partial r}{\partial (-u_v)} s_u + \frac{\partial r}{\partial (u_u)} s_v = -u^{\cdot}_v s_u + u^{\cdot}_u s_v = \bar{u} \quad .$$

Besonders wichtig ist der Fall, daß f eine skalare Funktion und wie im Beispiel das hermitesche Skalarprodukt (1) zweier Spinoren ist.

Folgende Tabelle gibt die Ergebnisse der verschiedenen Differentiationen für eine Reihe von Skalarprodukten (u,v Spinoren).

	$r=u^{\cdot}u$	$u^{\cdot}v$	$v^{\cdot}u$	$\bar{u}^{\cdot}v$	$v^{\cdot}\bar{u}$
$\frac{\partial}{\partial u}$	$u^{\cdot}$	0	$v^{\cdot}$	$-\bar{v}^{\cdot}$	0
$\frac{\partial}{\partial u^{\cdot}}$	u	v	0	0	$-\bar{v}$
$\frac{\partial}{\partial \bar{u}}$	$\bar{u}^{\cdot}$	$\bar{v}^{\cdot}$	0	0	$v^{\cdot}$
$\frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\cdot}}$	$\bar{u}$	0	$\overset{1}{v}$	v	0

Tabelle I

Im allgemeinen ist $\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^{\cdot}$ verschieden von $\frac{\partial f}{\partial u^{\cdot}}$, wie das Beispiel $f = u^{\cdot}v$, $\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^{\cdot} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial u}^{\cdot} = v$ zeigt.

Wenn aber f eine reelle Funktion ist, so gilt

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^{\cdot} = \frac{\partial f}{\partial u}^{\cdot}$$

und für die Komponenten dann

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u_A}\right)^{\cdot} = \frac{\partial f}{\partial u_A}^{\cdot} \quad .$$

2. Totale Differentiation

Ist das Polynom f eine Funktion von u, und u eine Funktion von t, so gilt für die Differentiation nach t die gewöhnliche Kettenregel, da

$$\frac{df}{dt} = \frac{df_{B..C\dot{D}..\dot{E}}}{dt} \; s_B \cdot\cdot s_C \, p_D \cdot\cdot p_E$$

$$= \frac{\partial f_{B..C\dot{D}..\dot{E}}}{\partial u_A} \; \frac{du_A}{dt} \; s_B \cdot\cdot s_C \, p_D \cdot\cdot p_E$$

$$= \frac{\partial f_{B..C\dot{D}..\dot{E}}}{\partial u_A} \; s_B \cdot\cdot s_C \, p_D \cdot\cdot p_E \, \delta_{AF} \; \frac{du_F}{dt}$$

$$= \frac{\partial f_{B..C\dot{D}..\dot{E}}}{\partial u_A} \; s_B \cdot\cdot s_C \, p_D \cdot\cdot p_E \, p_A \, s_F \; \frac{du_F}{dt}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u} \; \frac{du}{dt}$$

und analog, wenn f von $u^{\cdot}$ abhängt

$$\frac{df}{dt} = \frac{du^{\cdot}}{dt} \; \frac{\partial f}{\partial u^{\cdot}} \quad .$$

Man beachte, daß es sich in beiden Fällen um das gewöhnliche Produkt zweier Spinorpolynome im Sinne der Multiplikation im Spinorpolynomring handelt.

Auf die gleiche Weise erhält man die gewöhnliche Regel für die totale Differentiation nach der Zeit, so ist z.B.

$$\frac{df}{dt} = \frac{du^{\cdot}}{dt} \; \frac{\partial f}{\partial u^{\cdot}} + \frac{\partial f}{\partial u} \; \frac{du}{dt} \quad ,$$

es ist nur auf die Reihenfolge der Faktoren bei den Produkten zu achten.

3. L a g r a n g e f u n k t i o n

Sei $L = L(u,u')$ eine reelle und hinreichend oft differenzierbare Funktion, so können wir bilden

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0 \quad .$$

Dieses ist eine Differentialgleichung 2.Ordnung für einen konjugierten Spinor. Um eine Spinorgleichung zu erhalten, können wir das hermitesch Konjugierte dieser Gleichung nehmen, oder, da L reell ist, auch von

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u'^{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial u^{\cdot}} = 0 \tag{39}$$

ausgehen.
Unter Verwendung von

$$u_{Ar} = \frac{1}{2}\,(u_A + u_A^{\cdot}) \quad , \qquad u_{As} = \frac{1}{2i}\,(u_A - u_A^{\cdot})$$

kann man berechnen

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial L}{\partial u_A^{\cdot}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial L}{\partial u_A^{\cdot}} + \left(\frac{\partial L}{\partial u_A^{\cdot}}\right)^{\cdot}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial L}{\partial u_A^{\cdot}} + \frac{\partial L}{\partial u_A}\right) \tag{40}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial L}{\partial u_{Ar}}\,\frac{1}{2} + \frac{\partial L}{\partial u_{As}}\left(-\frac{1}{2i}\right) + \frac{\partial L}{\partial u_{Ar}}\,\frac{1}{2} + \frac{\partial L}{\partial u_{As}}\,\frac{1}{2i}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial L}{\partial u_{Ar}}$$

und

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\partial L}{\partial u_A^{\cdot}}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial L}{\partial u_A^{\cdot}} - \left(\frac{\partial L}{\partial u_A^{\cdot}}\right)^{\cdot}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial L}{\partial u_A^{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial u_A}\right) \tag{41}$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial L}{\partial u_{Ar}}\,\frac{1}{2} + \frac{\partial L}{\partial u_{As}}\left(-\frac{1}{2i}\right) - \frac{\partial L}{\partial u_{Ar}}\,\frac{1}{2} - \frac{\partial L}{\partial u_{As}}\,\frac{1}{2i}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial L}{\partial u_{As}} \quad .$$

Daran sieht man, daß (39) vier gewöhnliche reelle Euler-Lagrange-Gleichungen für die Variablen $q_i = u_{Ar}, u_{As}$ enthält. Dabei unterscheiden sich die Lagrangefunktion L in (39) und die Lagrangefunktion $\bar{L}$ für die Komponenten um den Faktor $\frac{1}{2}$.

(42) $$\bar{L} = \frac{1}{2} L \quad .$$

Also ist

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_i'} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_i} = 0 \qquad , i = 1,2,3,4$$

eine andere Schreibweise für (39).

Beispiel I

Die Euler-Lagrange-Gleichungen zu

(43) $$L = 2r\, u'^{\cdot} u' + \frac{1}{2} (u'^{\cdot} u - u^{\cdot} u')^2$$

sind

$$\frac{d}{dt}(2ru' + (u'^{\cdot} u - u^{\cdot} u')u) - (2(u'^{\cdot} u')u - (u'^{\cdot} u - u^{\cdot} u')u') = 0 ,$$

$$2ru'' + 2r'u' - 2(u'^{\cdot} u')u + (u''^{\cdot} u - u^{\cdot} u'')u + 2(u'^{\cdot} u - u^{\cdot} u')u' = 0 .$$

Das ist gerade Gleichung (14) für $x'' = 0$, womit wir in (43) die Lagrangefunktion für die geradlinige Bewegung gefunden haben. Entsprechend der Tatsache, daß (14) invariant ist gegenüber der beliebigen Phasentransformation $e^{i\gamma(t)} u$, ist L ihr gegenüber ebenfalls invariant. Deshalb muß sich L in x und x' direkt ausdrücken lassen. Den Zusammenhang sieht man unmittelbar durch Vergleich mit (19)

$$L = \frac{1}{2} x'_a x'_a = \frac{1}{2} v^2 \quad .$$

Also, wie zu erwarten war, ist (43) nichts anderes als die klassische Lagrangefunktion für die geradlinige Bewegung, nur ausgedrückt in Spinoren.

Beispiel II
Die Lagrangefunktion

$$L = 2r\, u'^{\cdot} u'$$

liefert

$$2ru'' + 2r'u' - 2(u'^{\cdot}u')u = 0 \quad . \tag{44}$$

Diese Gleichung ist nicht invariant und enthält vier unabhängige Gleichungen, d.h. die Phase wird hier durch die Differentialgleichung bestimmt, und zwar durch das Integral

$$2r(u'^{\cdot}u - u^{\cdot}u') = \text{const.}$$

d.h. die Phase ist von der x-Bewegung abhängig.
Weil eine Lagrangefunktion existiert, kann (44) nach dem Satz in §2 nicht die Spinorform einer einzigen x-Differentialgleichung sein. Man vergleiche mit Beispiel II in § 2 .

4. K a n o n i s c h e V a r i a b l e

Wie in der klassischen Theorie definieren wir die zu u kanonisch konjugierte Variable v durch

$$v = \frac{\partial L}{\partial u'^{\cdot}} \quad . \tag{45}$$

Gemäß (40),(41),(42) haben wir

$$v_{Ar} = \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial u'_{Ar}} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial u'_{Ar}}$$

$$v_{As} = \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial u'_{As}} = \frac{\partial L}{\partial u'_{As}} \quad ,$$

so daß sich u und v auch dann als kanonische Variable entsprechen, wenn man (39) in Real- und Imaginärteil seiner Komponenten zerlegt.

Das Bilden von kanonischen Variablen ist nur dann möglich, wenn man (45) nach u' auflösen kann. Im obigen Beispiel I ist das nicht möglich, weil die zur Lagrangefunktion (43) gehörige Euler-Lagrangegleichung nur drei unabhängige Gleichungen enthält.
Wir sehen die Nichtauflösbarkeit auch direkt ein. Es ist

$$v = \frac{\partial L}{\partial u'} = 2ru' + (u'\cdot u - u\cdot u')u = (2r - uu^{\cdot})u' + (u'\cdot u)u \quad ,$$

$$\frac{1}{2r}(1 + \frac{1}{r}\, uu^{\cdot})v = u' + \frac{1}{r}(u'\cdot u)u \quad ,$$

$$\frac{1}{r}\,(u^{\cdot}v) - (u\cdot u') = u'\cdot u \quad ,$$

also

$$v = (2r - 2uu^{\cdot})u' + \frac{1}{r}(u^{\cdot}v)u \quad .$$

Die Matrix $2r - 2uu^{\cdot}$ besitzt aber keine Inverse.
Dagegen in Beispiel II ist

$$v = \frac{\partial L}{\partial u'} = 2ru' \quad , \text{ also}$$

$$(46) \qquad u' = \frac{1}{2r}\, v$$

die Auflösung.

5. H a m i l t o n f u n k t i o n

Wenn (45) umkehrbar ist, können wir von der Lagrangefunktion zur Hamiltonfunktion übergehen. Zunächst haben wir für die Hamiltonfunktion der Komponenten

$$\bar{H} = u'_{Ar}\, v_{Ar} + u'_{As}\, v_{As} - \bar{L} = \frac{1}{2}\,(u'\cdot v + v\cdot u') - \bar{L}$$

und damit für die Hamiltonfunktion $H(u,v) = 2\bar{H}$ zur Spinorlagrangefunktion $L(u,u')$

$$(47) \qquad H = u'\cdot v + v\cdot u' - L(u,u') \quad .$$

H ist wie L eine reellwertige Funktion.

Mit Hilfe der Hamiltonfunktion und der kanonischen Variablen nehmen die Euler-Lagrange-Gleichungen eine besonders einfache Gestalt an. Durch Differentiation von (47) nach v^* folgt

$$u' = \frac{\partial H}{\partial v^*}.$$

und es ist

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u'^*} - \frac{\partial L}{\partial u^*} =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial(u'^*v+v^*u'-H(u,v))}{\partial u'^*} - \frac{\partial(u'^*v+v^*u'-H(u,v))}{\partial u^*} =$$

$$= \frac{dv}{dt} - \left(-\frac{\partial H}{\partial u^*}\right) ,$$

also

$$v' = -\frac{\partial H}{\partial u^*} .$$

Auch diese Gleichungen sind völlig analog den klassischen Gleichungen. Für das Beispiel II erhalten wir mit (46)

$$H = u'^*v + v^*u' - 2ru'^*u' = \frac{1}{2r}(v^*v+v^*v) - 2r\,\frac{v^*v}{4r^2} = \frac{1}{2r}\,v^*v$$

und

$$u' = \frac{\partial H}{\partial v^*} = \frac{1}{2r}\,v ,$$

$$v' = -\frac{\partial H}{\partial u^*} = \frac{1}{2r^2}(v^*v)u .$$

6. I n t e g r a l e

Ein Integral einer Spinordifferentialgleichung ist eine Funktion $g(u,u')$, die längs einer Lösung der Gleichung konstant bleibt. Es kann sich dabei um eine komplexwertige Funktion oder um ein beliebiges anderes Spinorpolynom handeln.

Wenn die Spinordifferentialgleichung eine Lagrangefunktion besitzt und man (45) nach u' auflösen kann, dann wird g durch Ersetzen von u' eine Funktion $g(u,v)$.

Wenn L nicht explizit von t abhängt, dann gilt das gleiche für H und g , und man erhält durch totale Differentiation des Integrals g nach t

$$0 = \frac{d}{dt}g(u,v) = \dot{u}\cdot\frac{\partial g}{\partial u}\cdot + \frac{\partial g}{\partial u}\,u' + \dot{v}\cdot\frac{\partial g}{\partial v}\cdot + \frac{\partial g}{\partial v}\,v'$$

$$= \frac{\partial H}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u}\cdot + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial v}\cdot - \frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v}\cdot - \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial H}{\partial u}\cdot \quad .$$

7. P o i s s o n k l a m m e r n

Seien f, g zwei beliebige Spinorpolynome, deren Koeffizienten von u und v abhängen, so definieren wir die P o i s s o n - k l a m m e r von f mit g als

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u}\cdot + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\cdot - \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v}\cdot - \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u}\cdot \tag{48}$$

es ist dies wieder ein Spinorpolynom.

Die Poissonklammer ist antikommutativ

$$\{f,g\} = -\{g,f\} \quad .$$

Leider gilt die Jacobische Identität

$$\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = 0 \tag{49}$$

nicht allgemein. Der Grund dafür ist die Nichtkommutativität des Spinorpolynomringes.

Wenn aber zwei der drei Polynome f,g,h Skalare sind, ist (49) erfüllt. Der klassische Satz, daß die Poissonklammer zweier Integrale wieder ein Integral ist, hat dann folgendes Analogon für Spinorintegrale :

Die Poissonklammer eines skalaren mit einem beliebigen Spinorintegral ist wieder ein Integral.

Den Zusammenhang von (48) mit den klassischen Poissonklammern erhält man, wenn man zu Komponenten übergeht; wegen des oben gesagten ist nur der Fall von Interesse, in dem eines der beiden Polynome, etwa g , skalar ist. Wegen der Additivität der Klammern genügt es, sich bei den Spinorpolynomen auf homogene Polynome

$$f = f_{B..\dot{C}}\, s_B \cdot\cdot p_C$$

zu beschränken. Dann wird

$$\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u^{\cdot}} = \frac{\partial f_{B..\dot{C}}}{\partial v_A}\, s_B \cdot\cdot p_C\, p_A \frac{\partial g}{\partial u^{\cdot}_D}\, s_D = \frac{\partial f_{B..\dot{C}}}{\partial v_A}\, s_B \cdot\cdot p_C\, \delta_{AD}\frac{\partial g}{\partial u^{\cdot}_D}$$

$$= \frac{\partial f_{B..\dot{C}}}{\partial v_A}\,\frac{\partial g}{\partial u^{\cdot}_A}\, s_B \cdot\cdot p_C$$

$$= \left(\frac{\partial f_{B..\dot{C}}}{\partial v_{Ar}}\frac{1}{2} + \frac{\partial f_{B..\dot{C}}}{\partial v_{As}}\frac{1}{2i}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial u_{Ar}}\frac{1}{2} - \frac{\partial g}{\partial u_{As}}\frac{1}{2i}\right) s_B \cdot\cdot p_C$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial f_{B..\dot{C}}}{\partial v_{Ar}}\frac{\partial g}{\partial u_{Ar}} + \frac{\partial f_{B..\dot{C}}}{\partial v_{As}}\frac{\partial g}{\partial u_{As}} + i\frac{\partial f_{B..\dot{C}}}{\partial v_{Ar}}\frac{\partial g}{\partial u_{As}} - i\frac{\partial f_{B..\dot{C}}}{\partial v_{As}}\frac{\partial g}{\partial u_{Ar}}\right) s_B \cdot\cdot p_C \,.$$

Für die anderen Summanden in (48) erhält man ähnliche Ausdrücke. Insgesamt ergibt sich

$$(50)\quad \{f,g\} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_{B..\dot{C}}}{\partial v_{Ar}}\frac{\partial g}{\partial u_{Ar}} + \frac{\partial f_{B..\dot{C}}}{\partial v_{As}}\frac{\partial g}{\partial u_{As}} - \frac{\partial g}{\partial v_{Ar}}\frac{\partial f_{B..\dot{C}}}{\partial u_{Ar}} - \frac{\partial g}{\partial v_{As}}\frac{\partial f_{B..\dot{C}}}{\partial u_{As}}\right) s_B \cdot p_C$$

Wie im Falle der Lagrangefunktion (42) unterscheiden sich die Spinorpoissonklammern (48) und die Klammern für die Komponenten um den Faktor $\frac{1}{2}$. Zerlegt man g und die Komponenten von f in Real- und Imaginärteil, so erhält man

$$\{f,g\} = \{f_r,g_r\} - \{f_s,g_s\} + i\{f_r,g_s\} + i\{f_s,g_r\} \,.$$

§ 4 DAS KEPLERPROBLEM

1. Die klassische Keplerbewegung

Bei geeigneter Wahl der Massen- und Zeiteinheit [6] ist

$$x'' = -\frac{x}{r^3} \tag{51}$$

die Differentialgleichung für die Keplerbewegung (Ein- oder Zweikörperproblem [10]).
Bekanntlich hat (51) die Integrale

$$\frac{1}{2}(x_x'^2 + x_y'^2 + x_z'^2) - \frac{1}{r} = h \tag{52}$$ (Energieintegral)

$$x \times x' = d \tag{53}$$ (Drehimpulsintegral)

$$\frac{1}{2} d \times x' + \frac{1}{2}\frac{x}{r} = l \tag{54}$$ (Laplaceintegral)

Dazu kommt noch ein hier nicht interessierendes Integral, das den Nullpunkt der Zeitzählung festlegt. Da die Integrale (53),(54) aus je drei Komponenten bestehen, haben wir also acht Integrale, die daher nicht alle voneinander unabhängig sein können. In der Tat bestehen die Beziehungen

$$d_a l_a = 0 \tag{55}$$

d.h. d und l sind orthogonal, und

$$l_a l_a - \frac{1}{4} - \frac{h}{2} d_a d_a = 0 \quad . \tag{56}$$

Je nach dem Vorzeichen von h erhält man die verschiedenen Bewegungstypen, und zwar hat man für

$h < 0$	elliptische,
$h = 0$	parabolische,
$h > 0$	hyperbolische Bewegung.

Für $d = 0$ entarten diese Bewegungen zu gradlinigen.

Die Bewegungsgleichung (51) ist die Euler-Lagrange-Gleichung zur Lagrangefunktion

$$L(x,x') = \frac{1}{2}\, x'_a x'_a + \frac{1}{r} \quad .$$

Damit erhält man die kanonischen Variablen

$$y_a = \frac{\partial L}{\partial x'_a} = x'_a$$

und die Hamiltonfunktion

$$H(x,y) = \frac{1}{2}\, y_a y_a - \frac{1}{r} \quad .$$

Die Poissonklammern

$$\left\{f,g\right\} = \frac{\partial f}{\partial y_a}\frac{\partial g}{\partial x_a} - \frac{\partial f}{\partial x_a}\frac{\partial g}{\partial y_a}$$

liefern, wenn f und g Integrale sind, wieder ein Integral, das aber eine Funktion der obigen Integrale sein muß. Diese Funktion ist hier stets eine lineare Funktion der Integrale (53),(54) , wenn f , g ebenfalls solche Integrale sind. Daher erzeugen die sechs Integrale (53),(54) eine Lie-Algebra, wenn man die Poissonklammern als Liesche Produkte nimmt. Die Algebra hat die Dimension 6 , eine Basis bilden die Integrale (53),(54) .

Folgende Tabelle liefert die Lie-Produkte der Basiselemente.

Tabelle II

	d_x	d_y	d_z	l_x	l_y	l_z
d_x	0	$-d_z$	d_y	0	$-l_z$	l_y
d_y	d_z	0	$-d_x$	l_z	0	$-l_x$
d_z	$-d_y$	d_x	0	$-l_y$	l_x	0
l_x	0	$-l_z$	l_y	0	$\frac{h}{2}d_z$	$-\frac{h}{2}d_y$
l_y	l_z	0	$-l_x$	$-\frac{h}{2}d_z$	0	$\frac{h}{2}d_x$
l_z	$-l_y$	l_x	0	$\frac{h}{2}d_y$	$-\frac{h}{2}d_x$	0

Eine für jeden Wert von h gültige Darstellung [1], [2] der Lie-Algebra des Keplerproblems durch reelle 4×4-Matrizen erhält man durch die Identifikationen

(57)

$$d_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad d_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad d_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$l_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{h}{2b} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad l_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h}{2b} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad l_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & \frac{h}{2b} & 0 \end{pmatrix} .$$

Dabei ist $b \neq 0$ eine beliebige reelle Konstante. Der Einfachheit halber sind hier Integrale und die sie darstellenden Matrizen mit den gleichen Symbolen bezeichnet.
Bei einer Darstellung einer Lie-Algebra gehen die Lie'schen Produkte (hier Poissonklammern) über in die Kommutatoren der entsprechenden Matrizen, z.B.

$$\{d_a, l_b\} \longrightarrow d_a l_b - l_b d_a \quad .$$

Im elliptischen Fall $h<0$ können wir $b = \sqrt{-\frac{h}{2}}$ setzen, wodurch auch die Matrizen l_a schiefsymmetrisch werden. Damit sieht man aber, daß die Lie-Algebra der elliptischen Keplerbewegung isomorph ist zur Lie-Algebra der schiefsymmetrischen reellen 4×4-Matrizen. Diese aber gehört zur Gruppe O_4 der vierdimensionalen Rotationen.

Im hyperbolischen Fall $h>0$ setzen wir $b = \sqrt{\frac{h}{2}}$. Die Matrizen l_a werden jetzt symmetrisch, während die d_a schiefsymmetrisch sind. Damit erhalten wir aber die Lie-Algebra der Lorentzgruppe.

2. Spinorregularisierung der Keplerbewegung

Setzt man

$$x'' = -\frac{x}{r^3} \quad , \quad x''u = -\frac{u}{r^2}$$

in (14) ein, so erhält man die invariante Spinorgleichung der Keplerbewegung

$$(58) \qquad 2ru'' + 2r'u' - 2(u'^{\cdot}u')u + 2(u'^{\cdot}u - u^{\cdot}u')u' + (u''^{\cdot}u - u^{\cdot}u'')u + \frac{u}{r^2} = 0 \ .$$

Sie besitzt eine Lagrangefunktion im Sinne des Spinorkalküls, nämlich

$$(59) \qquad L = 2r\, u'^{\cdot}u' + \frac{1}{2}(u'^{\cdot}u - u^{\cdot}u')^2 + \frac{1}{r} \quad .$$

Da wir nur drei unabhängige Variable haben, können wir mit Hilfe des Spinorkalküls keine kanonischen Variablen berechnen ($v = \frac{\partial L}{\partial u'}$ ist nicht nach u' auflösbar).

Selbstverständlich liefert (58) die gleichen Integrale (52),(53),(54). Man könnte dort direkt x und x' durch (7) und (11) ersetzen, um die Integrale in Spinorform zu erhalten. Mit dem Spinorkalkül bekommt man die Integrale direkt durch Integration aber ebenso elegant wie mit Hilfe der Vektorrechnung im klassischen Fall [10] .

Um das Energieintegral zu erhalten, multiplizieren wir (58) von links mit $u'^{\cdot}$ und addieren die hermitesch konjugierte Gleichung ; das ergibt

$$2r(u'^{\cdot}u'' + u''^{\cdot}u') + 2r'u'^{\cdot}u' + (u''^{\cdot}u - u^{\cdot}u'')(u'^{\cdot}u - u^{\cdot}u') + \frac{1}{r^2}(u'^{\cdot}u + u^{\cdot}u') = 0,$$

was integrabel ist

$$(60) \qquad 2r\, u'^{\cdot}u' + \frac{1}{2}(u'^{\cdot}u - u^{\cdot}u')^2 - \frac{1}{r} = h$$

und das Energieintegral liefert.

Für das Drehimpulsintegral subtrahieren wir die von rechts mit u^* multiplizierte Gleichung (58) von der dazu hermitesch konjugierten

$$2r(uu'''^* - u''u'^*) + 2r'(uu''^* - u'u'^*) - 2(u'^*u - u^*u')(uu''^* + u'u'^*) - 2(u'''^*u - u^*u'')uu'^* = 0 \ .$$

Auch dies läßt sich integrieren. Das Integral ist eine antihermitesche spurfreie Matrix, die wir deshalb in der Form id schreiben, wobei d hermitesch und spurfrei ist :

$$(61) \qquad 2r(uu'^* - u'u^*) - 2(u'^*u - u^*u')uu^* = i\,d \ .$$

Durch Vergleich mit (6) und (17) sieht man sofort, daß d tatsächlich der Drehimpuls ist.

Das Laplaceintegral erhält man unter Verwendung des Energie- und Drehimpulsintegrals. Zunächst multipliziere man (58) mit u'^* von rechts und addiere die hermitesch konjugierte Gleichung und multipliziere dann noch mit r

$$2r^2(u''u'^* + u'u''^*) + 4rr'u'u'^* - 2r(u'^*u')(uu'^* + u'u^*)$$

$$+ (u''^*u - u^*u'')(uu'^* - u'u^*)r + \frac{1}{r}(uu'^* + u'u^*) = 0 \ .$$

Nun können $2ru'^*u'$ und $(uu'^* - u'u^*)r$ mit Hilfe des Energie- bzw. Drehimpulsintegrals ersetzt werden

$$2r^2(u''u'^* + u'u''^*) + 4rr'u'u'^* - h(uu'^* + u'u^*) + \frac{id}{2}(u''^*u - u^*u'')$$

$$+ \frac{1}{2}(u'^*u - u^*u')^2(uu'^* + u'u^*) + (u'^*u - u^*u')(u''^*u - u^*u'')uu^* = 0 \ .$$

Dies ist nun integrabel

$$2r^2u'u'^* - huu^* + \frac{id}{2}(u'^*u - u^*u') + \frac{1}{2}(u'^*u - u^*u')^2uu^* = \text{const.} \ ,$$

h und d können nun wieder durch ihre Spinorausdrücke (60),(61) ersetzt werden

$$(62) \qquad 2r^2u'u'^* - 2r(u'^*u')uu^* + \frac{1}{r}uu^* + r(u'^*u - u^*u')(uu'^* - u'u^*)$$

$$- (u'^*u - u^*u')^2uu^* = 1 + \frac{1}{2} \ .$$

Die linke Seite ist eine hermitesche Matrix mit der Spur 1 , deshalb wurde die Integrationskonstante in der Form $1 + \frac{1}{2}$ geschrieben. Daß 1 hier mit dem Laplaceintegral (54) identisch ist, ist wiederum leicht zu sehen.

Die Lösung des Keplerproblems kann man nun direkt angeben, wenn man die Bewegungsgleichung (58) unter der Nebenbedingung

$$u' \cdot u - u \cdot u' = 0 \tag{63}$$

integriert [6] . Die Differentialgleichung geht dann nämlich über in

$$2r\, u'' + 2r' u' - 2(u' \cdot u')u + \frac{u}{r^2} = 0 \tag{64}$$

oder, wenn man noch $u' \cdot u'$ mit Hilfe des Energieintegrals (60) ersetzt, in

$$2r\, u'' + 2r' u' - \frac{h}{r} u = 0 \quad ,$$

was die Lösungen

$$u = u_o \cos\left(\sigma\sqrt{-\frac{h}{2}}\right) + \frac{r_o}{\sqrt{-\frac{h}{2}}} u'_o \sin\left(\sigma\sqrt{-\frac{h}{2}}\right) \qquad h < 0$$

$$u = u_o + r_o u'_o \sigma \qquad h = 0 \tag{65}$$

$$u = u_o \cosh\left(\sigma\sqrt{\frac{h}{2}}\right) + \frac{r_o}{\sqrt{\frac{h}{2}}} u'_o \sinh\left(\sigma\sqrt{\frac{h}{2}}\right) \qquad h > 0$$

hat und wobei σ die Zeittransformierte

$$\sigma = \int_{t_o}^{t} \frac{1}{r}\, d\tau$$

und $r_o = r(t_o)$ ist.

Die Konstanten u_o, u_o' müssen dabei die Bedingung (63) erfüllen. Wenn sie das nicht tun, so ist (65) zwar immer noch eine Lösung von (64) , stellt aber nicht mehr die Keplerbewegung dar. Um welche Bewegung es sich dann handelt, sieht man durch Vergleich mit (25) , welches die Spinorform der Differentialgleichungsschar (26) ist. Beide Differentialgleichungen unterscheiden sich aber nur durch den für die Keplerbewegung charakteristischen Term $\frac{u}{r^2} = \frac{xu}{r^3}$, so daß also die Lösungen von (64) die Lösungen von

$$x'' = -\frac{x}{r^3} + \frac{P^2}{r^4}\, x + \frac{P}{r^3}\; x \times x' \tag{66}$$

darstellen.

Da P beliebige reelle Werte annehmen kann, und die Gleichung für $P \to 0$ in die Keplerbewegungsgleichung übergeht, kann man als gestörte oder e r w e i t e r t e Keplerbewegungsgleichung ansehen.

§ 5 DIE ALLGEMEINE LAGRANGEFUNKTION

1. Die Euler-Lagrange-Gleichung

Die Lagrangefunktion (59) für die invariante Keplerbewegungsgleichung besteht aus zwei Teilen, der Term $\frac{1}{r}$ ist das Gravitationspotential, während die übrigen Terme homogen je vom 2.Grad in u und u' sind. Es liegt daher nahe, die allgemeinste Funktion dieser Art zu untersuchen. Es ist dies die Lagrangefunktion

$$
\begin{aligned}
(67)\quad L(u,u') = {} & a(u\cdot u)(u'\cdot u') + \beta(u\cdot u')^2 + \beta^*(u'\cdot u)^2 + d(u\cdot u')(u'\cdot u) \\
& + \varepsilon(\bar{u}\cdot u')^2 + \varepsilon^*(u'\cdot\bar{u})^2 + \kappa(\bar{u}\cdot u')(u\cdot u') + \kappa^*(u'\cdot\bar{u})(u'\cdot u) \\
& + \lambda(\bar{u}\cdot u')(u'\cdot u) + \lambda^*(u'\cdot\bar{u})(u\cdot u') + \frac{1}{r} \quad .
\end{aligned}
$$

Damit L eine reellwertige Funktion ist, müssen a, d reell sein, während die übrigen Koeffizienten beliebig komplex sein dürfen.

Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind

$$
\begin{aligned}
(68)\quad & a(ru'' + r'u' - (u'\cdot u')u) + d((u\cdot u')u' + (u'\cdot u')u + (u\cdot u'')u - (u'\cdot u)u') \\
& - 2\beta(u\cdot u')u' + 2\beta^*((u'\cdot u)u' + (u''\cdot u)u + (u'\cdot u')u) \\
& + \kappa^*(2(u'\cdot u)\bar{u}' + (u''\cdot u)\bar{u} + (u'\cdot u')\bar{u} + (u'\cdot\bar{u})u' + (u''\cdot\bar{u})u) - \kappa(\bar{u}\cdot u')u' \\
& + \lambda((\bar{u}\cdot u')u' + (\bar{u}\cdot u'')u) + \lambda^*(2(u\cdot u')\bar{u}' + (u'\cdot u')\bar{u} + (u\cdot u'')\bar{u} - (u'\cdot\bar{u})u') \\
& + \varepsilon^*(4(u'\cdot\bar{u})\bar{u}' + 2(u''\cdot\bar{u})\bar{u}) + \frac{u}{r^2} = 0
\end{aligned}
$$

2. Integrale

Mit der gleichen Methode, die für (58) das Energieintegral (60) lieferte, erhält man auch hier ein Integral. Man multipliziere (68) von links mit u'^* und addiere die hermitesch konjugierte Gleichung

$$a(r(u'\cdot u'' + u''\cdot u') + r'(u'\cdot u'))$$

$$+ d((u\cdot u')(u'\cdot u') + (u'\cdot u)(u'\cdot u') + (u''\cdot u)(u\cdot u') + (u\cdot u'')(u'\cdot u))$$

$$+ 2\beta((u\cdot u'')(u\cdot u') + (u'\cdot u')(u\cdot u')) + 2\beta'((u''\cdot u)(u'\cdot u) + (u'\cdot u')(u'\cdot u))$$

$$+ \kappa((u\cdot u'')(\bar{u}\cdot u') + (\bar{u}\cdot u')(u'\cdot u') + (\bar{u}\cdot u'')(u\cdot u'))$$

$$+ \kappa'((u''\cdot u)(u'\cdot \bar{u}) + (u'\cdot \bar{u})(u'\cdot u') + (u''\cdot \bar{u})(u'\cdot u))$$

$$+ \lambda((\bar{u}\cdot u'')(u'\cdot u) + (u'\cdot u')(\bar{u}\cdot u') + (u''\cdot u)(\bar{u}\cdot u'))$$

$$+ \lambda'((u''\cdot \bar{u})(u\cdot u') + (u'\cdot u')(u'\cdot \bar{u}) + (u\cdot u'')(u'\cdot \bar{u}))$$

$$+ 2\varepsilon(\bar{u}\cdot u'')(\bar{u}\cdot u') + 2\varepsilon'(u''\cdot \bar{u})(u'\cdot \bar{u}) + \frac{r'}{r^2} = 0 \quad .$$

Dies ist integrabel

$$(69) \qquad ar(u'\cdot u') + d(u\cdot u')(u'\cdot u) + \beta(u\cdot u')^2 + \beta'(u'\cdot u)^2$$

$$+ \kappa(\bar{u}\cdot u')(u\cdot u') + \kappa'(u'\cdot u)(u'\cdot \bar{u}) + \lambda(\bar{u}\cdot u')(u'\cdot u) + \lambda'(u'\cdot \bar{u})(u\cdot u')$$

$$+ \varepsilon(\bar{u}\cdot u')^2 + \varepsilon'(u'\cdot \bar{u})^2 - \frac{1}{r} = H \quad .$$

Weitere Integrale erhält man mit den zur Integration der invarianten Keplergleichung benutzten Methoden nicht. Schränkt man aber die Allgemeinheit der Lagrangefunktion (67) ein durch die Bedingung

$$\varepsilon = \kappa = \lambda = 0 \quad ,$$

so erhält man ein Integral, das dem Drehimpulsintegral entspricht :

$$a(r\, uu''\cdot + r'uu'\cdot - r\, u''u\cdot - r'u'u\cdot)$$

$$+ 2\beta((u\cdot u')u'u\cdot + (u\cdot u')uu'\cdot + (u\cdot u'')uu\cdot + (u'\cdot u')uu\cdot)$$

$$- 2\beta'((u'\cdot u)uu'\cdot + (u'\cdot u)u'u\cdot + (u''\cdot u)uu\cdot + (u'\cdot u')uu\cdot)$$

$$+ d((u'\cdot u)u\, u'\cdot + (u'\cdot u)uu\cdot + (u'\cdot u')uu\cdot + (u''\cdot u)uu\cdot$$

$$- (u\cdot u')u'u\cdot - (u'\cdot u')uu\cdot - (u\cdot u'')uu\cdot - (u\cdot u')uu'\cdot) = 0 \quad ,$$

also

$$(70)\quad ar(uu'^{\bullet}-u'u^{\bullet}) + 2\beta(u^{\bullet}u')uu^{\bullet} - 2\beta^{\bullet}(u'^{\bullet}u)uu^{\bullet} + d(u'^{\bullet}u-u^{\bullet}u')uu^{\bullet} = i\,D\ .$$

Die Integrationskonstante D ist eine hermitesche Matrix, deren Spur aber im Gegensatz zum Drehimpulsintegral (61) nicht verschwindet, so daß wir also vier Integrale gewonnen haben.

Im Spezialfall der invarianten Keplergleichung

$$(71)\qquad a = 2\ ,\quad \beta = \frac{1}{2}\ ,\quad d = -1$$

geht dieses Integral über in das Drehimpulsintegral (61). In diesem Fall verschwindet auch die Spur von D, so daß wir dann nur drei Integrale erhalten. Das vierte Integral, die Spur von D, ist typisch für die allgemeine Gleichung, durch dieses wird die Phase bis auf eine additive Konstante festgelegt.

Nun versuchen wir, ein dem Laplaceintegral entsprechendes Integral zu finden. Zunächst bekommen wir wieder durch Multiplikation mit $u'^{\bullet}$ von rechts, Addition der hermitesch konjugierten Gleichung und Multiplikation mit r

$$\begin{aligned}(72)\quad & a(r^2(u''u'^{\bullet} + u'u''^{\bullet}) + 2rr'u'u'^{\bullet} - r(u'^{\bullet}u')(uu'^{\bullet} + u'u^{\bullet})) \\ & + 2r\beta((u^{\bullet}u'')u'u^{\bullet} + (u'^{\bullet}u')u'u^{\bullet}) + 2r\beta^{\bullet}((u''^{\bullet}u)uu'^{\bullet} + (u'^{\bullet}u')uu'^{\bullet}) \\ & + rd((u'^{\bullet}u')uu'^{\bullet}+(u'^{\bullet}u')u'u^{\bullet}+(u^{\bullet}u'')uu'^{\bullet} +(u''^{\bullet}u)u'u^{\bullet}) + \frac{uu'^{\bullet}+ uu'^{\bullet}}{r} = 0\ .\end{aligned}$$

Dies ist nicht allgemein integrabel. Im Spezialfall (71) bekommen wir das Laplaceintegral (62). Nach der gleichen Methode wie bei der invarianten Gleichung erhalten wir ein Integral nur noch für den sehr einfachen Fall

$$(73)\qquad \beta = \beta^{\bullet} = d = 0\ .$$

Dann vereinfacht sich (72) zu

$$ar^2(u''u'^{\bullet}+u'u''^{\bullet}) + 2arr'u'u'^{\bullet} - aru'^{\bullet}u'(uu'^{\bullet}+u'u^{\bullet}) + \frac{uu'^{\bullet}+ uu'^{\bullet}}{r} = 0\ .$$

Hierin können wir $aru'^{\dagger}u'$ durch den Energiesatz (69) ersetzen

$$ar^2(u''u'^{\dagger} + u'u'^{\dagger\dagger}) + 2arr'u'u'^{\dagger} - H(uu'^{\dagger} + u'u^{\dagger}) = 0 \quad ,$$

also

$$ar^2u'u'^{\dagger} - H\,uu^{\dagger} = \text{const.}$$

$$ar^2u'u'^{\dagger} - ar(u'^{\dagger}u')uu^{\dagger} + \frac{1}{r}uu^{\dagger} = L + \frac{1}{2}$$

L ist wie das Integral (62) spurfrei und hermitesch.

M o t o r i n t e g r a l e

Für den obigen einfachen Fall (73), d.h. für die Lagrangefunktion

$$(74) \qquad L = ar\,u'^{\dagger}u' + \frac{1}{r}$$

mit der Euler-Lagrange-Gleichung

$$(75) \qquad aru'' + ar'u' - a(u'^{\dagger}u')u + \frac{u}{r^2} = 0$$

gibt es noch acht weitere Integrale, die sogenannten Motorintegrale. (vgl. [7])Multiplikation von (75) mit $\bar{u}^{\dagger}$ von links gibt die integrable Gleichung

$$ar\,\bar{u}^{\dagger}u'' + ar'\bar{u}^{\dagger}u' = 0$$

und das skalare Motorintegral

$$(76) \qquad ar\,\bar{u}^{\dagger}u' = P = P_r + i\,P_s \quad .$$

Die Integrationskonstante ist beliebig komplex, also enthält (76) zwei reelle Integrationskonstanten P_r und P_s .

Die anderen sechs Integrale bekommt man so :
man multipliziere (75) von rechts mit $\bar{u}^{\dagger\prime}$

$$(77) \qquad ar\,u''\bar{u}^{\dagger\prime} + ar'u'\bar{u}^{\dagger\prime} - a(u'^{\dagger}u')u\bar{u}^{\dagger\prime} + \frac{1}{r^2}u\bar{u}^{\dagger\prime} = 0 \quad ,$$

auf die hierzu hermitesch konjugierte Gleichung wende man den Automorphismus (§1) an und subtrahiere dann das Ergebnis von (77) ; zuletzt multipliziere man noch mit r

$$ar^2(u''\bar{u}'^{\bullet}+u'\bar{u}'^{\bullet\prime}) + 2arr'u'\bar{u}'^{\bullet} - ar(u'^{\bullet}u')(u\bar{u}'^{\bullet}+u'\bar{u}^{\bullet}) + \frac{1}{r}(u\bar{u}'^{\bullet}+u'\bar{u}^{\bullet}) = 0 \quad .$$

Wie beim Laplaceintegral kann man hier $ar\,u'^{\bullet}u'$ mit Hilfe des Energiesatzes ersetzen

$$ar^2(u''\bar{u}'^{\bullet}+u'\bar{u}'^{\bullet\prime}) + 2arr'u'\bar{u}'^{\bullet} - H(u\bar{u}'^{\bullet}+u'\bar{u}^{\bullet}) = 0 \quad .$$

Dies ist nun integrabel

$$(78) \qquad ar^2u'\bar{u}'^{\bullet} - H\,u\bar{u}^{\bullet} = M = M_r + M_s\,i \quad .$$

Das Integral ist spurfrei, aber nicht hermitesch, so daß wir es in den hermiteschen Teil M_r und den antihermiteschen Teil iM_s zerlegen können. M_r und M_s sind jetzt beide spurfrei und hermitesch. Wir haben also sechs Integrale bekommen.

Insgesamt haben wir damit für die zur Lagrangefunktion (74) gehörige Spinordifferentialgleichung (75) sechzehn Integrale gefunden, nämlich das Energieintegral

$$ar\,u'^{\bullet}u' - \frac{1}{r} = H$$

mit einer Konstanten, das Drehimpulsintegral

$$ar(uu'^{\bullet} - u'u^{\bullet}) = i\,D$$

mit vier Konstanten, das Laplaceintegral

$$ar^2\,u'u'^{\bullet} - H\,uu^{\bullet} = L + \frac{1}{2}$$

mit drei Konstanten, sowie die Motorintegrale (76) und (78) mit zwei bzw. sechs Konstanten.

3. Beziehungen zwischen den Integralen

Es existiert noch ein weiteres Integral, nämlich der Nullpunkt der Zeitzählung, da in der Lagrangefunktion die Zeit t nicht explizit vorkommt. Dieses Integral ist aber hier nicht von Interesse. Von den obigen Integralen können also nur sieben unabhängig voneinander sein, d.h. zwischen ihnen müssen mindestens neun Beziehungen bestehen.

Die erste dieser Beziehungen erhalten wir, wenn wir das Lorentzprodukt (4) der Vektoren D und L berechnen. Es ist

$$\langle DZ(L + \tfrac{1}{2}) \rangle = 0 \,, \tag{79}$$

denn nach (4) und (5) ist

$$\begin{aligned}
&\langle ar(uu'^{\cdot} - u'u^{\cdot})\, Z\, (ar^2u'u'^{\cdot} - ar(u'^{\cdot}u')uu^{\cdot} + \tfrac{1}{r}\, uu^{\cdot}) \rangle \\
&\quad = \langle ar(uu'^{\cdot} - u'u^{\cdot})(ar^2u'u'^{\cdot} - ar(u'^{\cdot}u')uu^{\cdot} + \tfrac{1}{r}\, uu^{\cdot}) \rangle \\
&\qquad - 2 \langle ar(uu'^{\cdot} - u'u^{\cdot}) \rangle \langle ar^2u'u'^{\cdot} - ar(u'^{\cdot}u')uu^{\cdot} + \tfrac{1}{r}\, uu^{\cdot} \rangle \\
&\quad = \langle a^2r^3(u'^{\cdot}u')uu^{\cdot} - a^2r^2(u'^{\cdot}u)(u'^{\cdot}u')uu^{\cdot} + a(u'^{\cdot}u)uu^{\cdot} \\
&\qquad - a^2r^3(u^{\cdot}u')u'u'^{\cdot} + a^2r^3(u'^{\cdot}u')u'u^{\cdot} - aru'u^{\cdot} \rangle \\
&\qquad - 2 \langle ar(uu'^{\cdot} - u'u^{\cdot}) \rangle \langle ar^2u'u'^{\cdot} - ar(u'^{\cdot}u')uu^{\cdot} + \tfrac{1}{r}\, uu^{\cdot} \rangle \\
&\quad = \tfrac{1}{2}\, ar(u'^{\cdot}u - u^{\cdot}u') - 2\, \tfrac{1}{2}\, ar(u'^{\cdot}u - u^{\cdot}u')\, \tfrac{1}{2} = 0 \,.
\end{aligned}$$

Es lohnt sich, das Lorentzprodukt auszuschreiben

$$\langle D\, Z\, (L + \tfrac{1}{2}) \rangle = D_a L_a - \tfrac{1}{2}\, D_t = 0 \,.$$

Hieran sieht man unmittelbar, daß diese Beziehung die Verallgemeinerung der Orthogonalitätsbedingung (55) ist, dort handelt es sich um das euklidische Skalarprodukt zweier Vektoren des R^3, hier um das Lorentzprodukt zweier Vierervektoren. Den Unterschied kann man auch so formulieren, daß es sich in beiden Fällen um das Lorentzprodukt handelt, im klassischen Fall aber die vierte Komponente D_t des Drehimpulses verschwindet.

Auch die zweite klassische Beziehung zwischen den Integralen der Keplerbewegung (56) hat ein Analogon. Wir bekommen es wie folgt : wir berechnen

$$\begin{aligned}\langle DZD\rangle &= \langle DD\rangle - 2\langle D\rangle^2\\ &= -a^2r^2\langle(uu'' - u'u')(uu'' - u'u')\rangle + 2a^2r^2\langle uu'' - u'u'\rangle^2\\ &= a^2r^3u''u' - \tfrac{1}{2}a^2r^2(u''u)^2 - \tfrac{1}{2}a^2r^2(u'u')^2 + \tfrac{1}{2}a^2r^2(u''u-u'u')^2\\ &= a^2r^3u''u' - a^2r^2(u''u)(u'u')\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\langle(L+\tfrac{1}{2})Z(L+\tfrac{1}{2})\rangle\\ &= \langle(ar^2uu''-ar(u''u)uu'+\tfrac{1}{r}uu')(ar^2uu''-ar(u''u)uu'+\tfrac{1}{r}uu') - 2\langle L+\tfrac{1}{2}\rangle^2\\ &= \langle a^2r^4(u''u')u'u'' - a^2r^3(u''u')(u''u)u'u' + ar(u''u)u'u'\\ &\quad - a^2r^3(u''u')(u'u')uu'' + a^2r^3(u''u')^2uu' - ar(u''u')uu'\\ &\quad + ar(u'u')uu'' - ar(u''u')uu' + \tfrac{1}{r}uu' - 2(\tfrac{1}{2})^2\\ &= a^2r^4(u''u')^2 - a^2r^3(u''u')(u''u)(u'u') + ar(u'u')(u''u) - ar^2(u''u')\\ &= \tfrac{1}{a}(aru''u' - \tfrac{1}{r})(a^2r^3u''u' - a^2r^2(u''u)(u'u'))\\ &= \tfrac{1}{a}H(a^2r^3u''u' - a^2r^2(u''u)(u'u'))\end{aligned}$$

also gilt

$$\langle(L+\tfrac{1}{2})Z(L+\tfrac{1}{2})\rangle - \tfrac{1}{a}H\langle DZD\rangle = 0$$

oder in Komponenten

(80) $$(L_aL_a - \tfrac{1}{4}) - \tfrac{1}{a}H(D_aD_a - D_tD_t) = 0 \quad .$$

Damit ist die Analogie klar, für $a = 2$ und $D_t = 0$ geht die allgemeine Beziehung (80) in die klassische (56) über.

Nun müssen noch die Motorintegrale mit den übrigen verknüpft werden. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}\langle DZM\rangle &= \langle DM\rangle - 2\langle D\rangle\langle M\rangle = \langle DM\rangle \\ &= \frac{1}{i}\left\langle ar(uu'' - u'u')(ar^2u'\bar{u}'' - ar(u''u')u\bar{u}' + \frac{1}{r}u\bar{u}'\right) \\ &= \frac{1}{2i}a^2r^3(u'u')\bar{u}''u + \frac{1}{2i}a^2r^3(u''u')\bar{u}'u' - \frac{1}{2i}ar\,\bar{u}'u' \\ &= \frac{1}{2}\,i\,a\,r\,\bar{u}'u'\end{aligned}$$

da $0 = (\bar{u}'u)' = \bar{u}''u + \bar{u}'u'$.
Also haben wir

(81) $$\langle DZM\rangle - \frac{1}{2}\,i\,P = 0 \quad .$$

Eine sehr einfache Beziehung ist

(82) $$\langle MM\rangle - \frac{1}{a}\,H\,P^2 = 0 \quad ,$$

denn

$$\begin{aligned}\langle MM\rangle &= \langle(ar^2u'\bar{u}' - H\,u\bar{u}')(ar^2u'\bar{u}' - H\,u\bar{u}')\rangle \\ &= \langle - ar^2H(\bar{u}'u)u'\bar{u}' - ar^2H(\bar{u}'u')u\bar{u}'\rangle \\ &= - ar^2H(\bar{u}'u)(\bar{u}'u') = ar^2H\,(\bar{u}'u')^2 = \frac{1}{a}\,H\,P^2 \quad .\end{aligned}$$

Wie in (81) sind auch hierin zwei Bedingungen enthalten, da P beliebig komplex sein kann.

Eine letzte Beziehung ist ebenfalls leicht zu berechnen

$$\begin{aligned}M(L + \tfrac{1}{2}) &= (ar^2u'\bar{u}' - H\,u\bar{u}')(ar^2u'u' - Huu') \\ &= - ar^2H(\bar{u}'u)u'u' - ar^2H(\bar{u}'u')uu' \\ &= a\,H\,r^2(\bar{u}'u')(u'u' - uu') \quad ,\end{aligned}$$

also

(83) $$M(L + \tfrac{1}{2}) + \frac{1}{a}\,H\,P\,iD = 0 \quad .$$

4. K a n o n i s c h e V a r i a b l e

Wir berechnen nun kanonische Variable v für die Lagrangefunktion

$$L = ar(u'^{*}u') + \beta(u^{*}u')^2 + \beta^{*}(u'^{*}u)^2 + d(u^{*}u')(u'^{*}u) + \frac{1}{r} \quad . \tag{84}$$

Auch für die allgemeinere Funktion (67) existieren (bis auf spezielle Kombinationen der Koeffizienten, für die gewisse Matrizen singulär werden) kanonische Variable. Die für die weitere Anwendung notwendige Auflösung von $v = \frac{\partial L}{\partial u'}$ nach u' erfordert aber einen erheblichen Rechenaufwand, der sich nicht lohnt, da in diesem allgemeinen Fall nur das Energieintegral (69) existiert. Wir beschränken uns daher auf (84). Dann haben wir

$$v = \frac{\partial L}{\partial u'} = aru' + 2\beta^{*}(u'^{*}u)u + d(u^{*}u')u \quad .$$

Wir multiplizieren von links mit u^{*} und nehmen das hermitesch konjugierte

$$(v^{*}u) = (a + d)r(u'^{*}u) + 2\beta r(u^{*}u')$$

und setzen $(u'^{*}u)$ hieraus oben ein

$$v = (ar + \frac{d(a+d)-4\beta\beta^{*}}{a+d} uu^{*})u' + \frac{2\beta^{*}}{r(a+d)} (v^{*}u)u \quad ,$$

dann multiplizieren wir mit der zur Matrix

$$ar + \frac{d(a+d)-4\beta\beta^{*}}{a+d} uu^{*} \qquad \text{inversen Matrix}$$

$$\frac{1}{ar} - \frac{d(a+d)-4\beta\beta^{*}}{ar^2((a+d)^2-4\beta\beta^{*})} uu^{*}$$

und können dann nach u' auflösen

$$u' = \frac{v}{ar} - \frac{(ad+d^2-4\beta\beta^{*})(u^{*}v)+2\beta^{*}a(v^{*}u)}{ar^2((a+d)^2-4\beta\beta^{*})} u \tag{85}$$

$$= \frac{v}{ar} - \frac{A(u^{*}v)+2\beta^{*}a(v^{*}u)}{ar^2B} u$$

mit den Abkürzungen $A = d(a+d)-4\beta\beta^{*}$, $B = (a+d)^2-4\beta\beta^{*} = a(a+d)+A$.

Die Auflösung ist nicht möglich, wenn $a = 0$ oder $B = 0$. Das ist z.B. der Fall bei der invarianten Lagrangefunktion (59) , d.h. für $a = 2$, $\beta = \beta^* = \frac{1}{2}$, $d = -1$.

Wenn die Auflösung aber möglich ist, können in den Integralen die u' durch (85) ersetzt werden, so daß nur noch die kanonischen Variablen u und v vorkommen.

Zur Bestimmung der Hamiltonfunktion benötigen wir

$$(u^{\cdot}u') = \frac{v^{\cdot}v}{a^2r^2} + \frac{1}{a^2r^3B^2}((A^2+4a^2\beta\beta^*-2AB)(u^{\cdot}v)(v^{\cdot}u) - 2a^2\beta(a+d)(u^{\cdot}v)^2 - 2a^2\beta^*(a+d)(v^{\cdot}u)^2)$$

$$(u'^{\cdot}u)^2 = \frac{1}{ar^2B^2}(a(a+d)^2(v^{\cdot}u)^2 + 4\beta\beta a(u^{\cdot}v)^2 - 4a\beta(a+d)(u^{\cdot}v)(v^{\cdot}u))$$

$$(u^{\cdot}u)^2 = \frac{1}{ar^2B^2}(a(a+d)^2(u^{\cdot}v)^2 + 4\beta^*\beta a(v^{\cdot}u)^2 - 4a\beta^*(a+d)(u^{\cdot}v)(v^{\cdot}u))$$

$$(u'^{\cdot}u)(u^{\cdot}u') = \frac{1}{ar^2B^2}((a(a+d)^2 + 4a\beta\beta^*)(u^{\cdot}v)(v^{\cdot}u) - 2a\beta^*(a+d)(v^{\cdot}u)^2 - 2a\beta(a+d)(u^{\cdot}v)^2) \quad .$$

Daraus folgt

$$L = \frac{v^{\cdot}v}{ar} - \frac{1}{ar^2B}(A(u^{\cdot}v)(v^{\cdot}u) + a\beta(u^{\cdot}v)^2 + a\beta^*(v^{\cdot}u)^2) + \frac{1}{r}$$

und

$$H = u'^{\cdot}v + v^{\cdot}u' - L$$

$$= \frac{v^{\cdot}v}{ar} - \frac{A(v^{\cdot}u)(u^{\cdot}v)+2a\beta(u^{\cdot}v)^2}{ar^2B} + \frac{v^{\cdot}v}{ar} - \frac{A(v^{\cdot}u)(u^{\cdot}v)+2\beta^*a(vu)^2}{ar^2B} - L$$

$$(86) \qquad H = \frac{v^{\cdot}v}{ar} - \frac{(d(a+d)-4\beta\beta^*)(v^{\cdot}u)(u^{\cdot}v) + a\beta(u^{\cdot}v)^2 + a\beta^*(v^{\cdot}u)^2}{ar^2((a+d)^2 - 4\beta\beta^*)} - \frac{1}{r} \quad ,$$

womit die Hamiltonfunktion gefunden ist. (86) ist gleichzeitig auch der Ausdruck für das Energieintegral in kanonischen Variablen.

Wir führen nun auch das Drehimpulsintegral (70) in kanonischen Variablen aus.

$$i\,D = ar\,\frac{uv^{\cdot}}{ar} - \frac{A(v^{\cdot}u)+2a\beta(u^{\cdot}v)}{ar^2B}\,uu^{\cdot} - \frac{vu^{\cdot}}{ar} + \frac{A(u^{\cdot}v)+2a\beta^{\cdot}(v^{\cdot}u)}{ar^2B}\,uu^{\cdot}$$

$$+ \frac{2\beta}{rB}\left((a+d)(u^{\cdot}v) - 2\beta^{\cdot}(v^{\cdot}u)\right)uu^{\cdot} - \frac{2\beta^{\cdot}}{rB}\left((a+d)(v^{\cdot}u) - 2\beta(u^{\cdot}v)\right)uu^{\cdot}$$

$$+ \frac{d}{rB}\left((a+d)(v^{\cdot}u) - 2\beta(u^{\cdot}v) - (a+d)(u^{\cdot}v) + 2\beta^{\cdot}(v^{\cdot}u)\right)uu^{\cdot}\ ,$$

also

$$uv^{\cdot} - vu^{\cdot} = i\,D\ . \tag{87}$$

Dieses Ergebnis ist bemerkenswert, da es nicht von den Koeffizienten a, β, d der Lagrangefunktion abhängt. (Kanonische Variable, und damit (87), gibt es natürlich nur, wenn $a \neq 0$, $B \neq 0$).

Die übrigen Integrale existieren nur, wenn $\beta = d = 0$. Für $a = 2$ geht dann die hier betrachtete Spinordifferentialgleichung (75) über in die Gleichung, die aus der invarianten Keplergleichung unter der Nebenbedingung

$$u'u - u^{\cdot}u' = 0$$

entsteht. Dann gehen die hier aufgestellten Integrale über in die Integrale der erweiterten Keplerbewegung (66). Um die Resultate hier mit denen der invarianten Gleichung unmittelbar vergleichen zu können, wird im folgenden $a = 2$ gesetzt. Zusammen mit (73) haben wir dann einfach

$$u' = \frac{v}{2r}\ ,\quad u'^{\cdot} = \frac{v^{\cdot}}{2r}\ ,$$

$$\bar{u}' = \frac{\bar{v}}{2r}\ ,\quad \bar{u}'^{\cdot} = \frac{\bar{v}^{\cdot}}{2r}\ .$$

Daraus folgt unmittelbar :

$$\frac{1}{2}\, v\dot{v} - H\, u\dot{u} = L + \frac{1}{2} \qquad \text{(Laplaceintegral)}$$

$$\frac{1}{2}\, v\dot{\bar{v}} - H\, u\dot{\bar{u}} = M \qquad \text{(Motorintegral)}$$

$$\bar{u}\dot{v} = P \qquad \text{(skalares Motorintegral)} .$$

Es ist zweckmäßig, die Integrale auch direkt in Komponenten anzugeben.

(88)

$$\begin{aligned}
D_x &= \frac{1}{2i}\,(u_u\dot{v}_v - v_u\dot{u}_v - \dot{u}_u v_v + \dot{v}_u u_v) \\
&= v_{ur}u_{vs} - v_{us}u_{vr} + v_{vr}u_{us} - v_{vs}u_{ur} \\
D_y &= -\frac{1}{2}(v_u\dot{u}_v - u_u\dot{v}_v - \dot{u}_u v_v + \dot{v}_u u_v) \\
&= v_{vr}u_{ur} - v_{us}u_{vs} + v_{vs}u_{us} - v_{ur}u_{vr} \\
D_z &= \frac{1}{2i}\,(u_u\dot{v}_u - v_u\dot{u}_u + v_v\dot{u}_v - u_v\dot{v}_v) \\
&= v_{ur}u_{us} - v_{us}u_{ur} + v_{vs}u_{vr} - v_{vr}u_{vs} \\
D_t &= \frac{1}{2i}\,(u_u\dot{v}_u - v_u\dot{u}_u + u_v\dot{v}_v - v_v\dot{u}_v) \\
&= v_{ur}u_{us} - v_{us}u_{ur} + v_{vr}u_{vs} - v_{vs}u_{vr}
\end{aligned}$$

(89)

$$\begin{aligned}
L_x &= \frac{1}{4}\,(v_u\dot{v}_v + \dot{v}_u v_v) - \frac{H}{2}\,(u_u\dot{u}_v + \dot{u}_u u_v) \\
&= \frac{1}{2}\,(v_{ur}v_{vr} + v_{us}v_{vs}) - H\,(u_{ur}u_{vr} + u_{us}u_{vs}) \\
L_y &= \frac{1}{4i}\,(v_v\dot{v}_u - \dot{v}_v v_u) - \frac{H}{2i}\,(u_v\dot{u}_u - \dot{u}_v u_u) \\
&= \frac{1}{2}\,(v_{ur}v_{vs} - v_{us}v_{vr}) - H\,(u_{ur}u_{vs} - u_{us}u_{vr}) \\
L_z &= \frac{1}{4}\,(v_u\dot{v}_u - v_v\dot{v}_v) - \frac{H}{2}(u_u\dot{u}_u - u_v\dot{u}_v) \\
&= \frac{1}{4}\,(v_{ur}^2 + v_{us}^2 - v_{vr}^2 - v_{vs}^2) - \frac{H}{2}(u_{ur}^2 + u_{us}^2 - u_{vr}^2 - u_{vs}^2)
\end{aligned}$$

$$P_r = \frac{1}{2}\left(-u_v v_u + u_u v_v - u_v^{\cdot} v_u^{\cdot} + u_u^{\cdot} v_v^{\cdot}\right)$$

$$= v_{us}u_{vs} - v_{ur}u_{vr} + v_{vr}u_{ur} - v_{vs}u_{us} \tag{90}$$

$$P_s = \frac{1}{2i}\left(u_v v_v - u_v v_u + u_v^{\cdot} v_u^{\cdot} - u_v^{\cdot} v_v^{\cdot}\right)$$

$$= v_{vr}u_{us} - v_{us}u_{vr} + v_{vs}u_{ur} - v_{ur}u_{vs}$$

$$M_x^r = \frac{1}{8}\left(v_u^2 - v_v^{\cdot 2} + v_u^{\cdot 2} - v_v^2\right) - \frac{H}{4}\left(u_u^2 - u_v^{\cdot 2} + u_u^{\cdot 2} - u_v^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(v_{ur}^2 - v_{us}^2 - v_{vr}^2 + v_{vs}^2\right) - \frac{H}{2}\left(u_{ur}^2 - u_{us}^2 + u_{vs}^2 - u_{vr}^2\right)$$

$$M_y^r = -\frac{1}{8i}\left(v_u^2 - v_v^{\cdot 2} - v_u^{\cdot 2} + v_v^2\right) + \frac{H}{4i}\left(u_u^2 - u_v^{\cdot 2} - u_u^{\cdot 2} + u_v^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(v_{ur}v_{us} + v_{vr}v_{vs}\right) + H\left(u_{ur}u_{us} + u_{vr}u_{vs}\right)$$

$$M_z^r = -\frac{1}{4}\left(v_u v_v + v_u^{\cdot} v_v^{\cdot}\right) + \frac{H}{2}\left(u_u u_v + u_u^{\cdot} u_v^{\cdot}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(v_{us}v_{vs} - v_{ur}v_{vr}\right) - H\left(u_{us}u_{vs} - u_{ur}u_{vr}\right) \tag{91}$$

$$M_x^s = \frac{1}{8i}\left(v_u^2 + v_v^{\cdot 2} - v_u^{\cdot 2} - v_v^2\right) - \frac{H}{4i}\left(u_u^2 + u_v^{\cdot 2} - u_u^{\cdot 2} - u_v^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(v_{ur}v_{us} - v_{vr}v_{vs}\right) - H\left(u_{ur}u_{us} - u_{vr}u_{vs}\right)$$

$$M_y^s = \frac{1}{8}\left(v_u^2 + v_v^{\cdot 2} + v_u^{\cdot 2} + v_v^2\right) - \frac{H}{4}\left(u_u^2 + u_v^{\cdot 2} + u_u^{\cdot 2} + u_v^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(v_{ur}^2 - v_{us}^2 + v_{vr}^2 - v_{vs}^2\right) - \frac{H}{2}\left(u_{ur}^2 - u_{us}^2 + u_{vr}^2 - u_{vs}^2\right)$$

$$M_z^s = \frac{1}{4i}\left(v_u^{\cdot} v_v^{\cdot} - v_u v_v\right) - \frac{H}{2i}\left(u_u^{\cdot} u_v^{\cdot} - u_u u_v\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(v_{ur}v_{vs} + v_{us}v_{vr}\right) + H\left(u_{ur}v_{vs} + u_{us}u_{vr}\right) \quad .$$

§ 6 DIE LIE-ALGEBRA DER ERWEITERTEN KEPLERBEWEGUNG

1. Poissonklammern

Nun sind wir in der Lage, die Poissonklammern dieser fünfzehn Integrale im Sinne des Spinorkalküls zu bilden. Dabei kann man direkt die Definition (48) verwenden, sofern eines der Integrale skalar ist. Rechnet man aber in Komponenten, so darf man gemäß (50) den Faktor $\frac{1}{2}$ nicht vergessen.

Beispiel : $f = P = \bar{u}^{\cdot}v$, $g = D_t = \frac{1}{2i}(v^{\cdot}u - u^{\cdot}v)$

$$\{P,D_t\} = \bar{u}^{\cdot}(-\tfrac{1}{2i}v) - (-\bar{v}^{\cdot})\tfrac{1}{2i}u = i\,\bar{u}^{\cdot}v = i\,P \ ,$$

da $\bar{v}^{\cdot}u = \overline{(\bar{v}^{\cdot}u)^{\cdot}} = \overline{(u^{\cdot}\bar{v})} = \bar{u}^{\cdot}\bar{\bar{v}} = -\bar{u}^{\cdot}v$,

also $\{P_r,D_t\} = -P_s$, $\{P_s,D_t\} = P_r$.

Folgende Tabelle III gibt die Poissonklammern sämtlicher Integrale.

	D_x	D_y	D_z	L_x	L_y	L_z	D_t	P_r	P_s	M^r_x	M^r_y	M^r_z	M^s_x	M^s_y	M^s_z
D_x	0	$-D_z$	D_y	0	$-L_z$	L_y	0	0	0	0	$-M^r_z$	M^r_y	0	$-M^s_z$	M^s_y
D_y	D_z	0	$-D_x$	L_z	0	$-L_x$	0	0	0	M^r_z	0	$-M^r_x$	M^s_z	0	$-M^s_x$
D_z	$-D_y$	D_x	0	$-L_y$	L_x	0	0	0	0	$-M^r_y$	M^r_x	0	$-M^s_y$	M^s_x	0
L_x	0	$-L_z$	L_y	0	$\frac{H}{2}D_z$	$-\frac{H}{2}D_y$	0	$-M^r_x$	$-M^s_x$	$-\frac{H}{2}P_r$	0	0	$-\frac{H}{2}P_s$	0	0
L_y	L_z	0	$-L_x$	$-\frac{H}{2}D_z$	0	$\frac{H}{2}D_x$	0	$-M^r_y$	$-M^s_y$	0	$-\frac{H}{2}P_r$	0	0	$-\frac{H}{2}P_s$	0
L_z	$-L_y$	L_x	0	$\frac{H}{2}D_y$	$-\frac{H}{2}D_x$	0	0	$-M^r_z$	$-M^s_z$	0	0	$-\frac{H}{2}P_r$	0	0	$-\frac{H}{2}P_s$
D_t	0	0	0	0	0	0	0	P_s	$-P_r$	M^s_x	M^s_y	M^s_z	M^r_x	M^r_y	M^r_z
P_r	0	0	0	M^r_x	M^r_y	M^r_z	$-P_s$	0	D_t	$-L_x$	$-L_y$	$-L_z$	0	0	0
P_s	0	0	0	M^s_x	M^s_y	M^s_z	P_r	$-D_t$	0	0	0	0	$-L_x$	$-L_y$	$-L_z$
M^r_x	0	$-M^r_z$	M^r_y	$\frac{H}{2}P_r$	0	0	$-M^s_x$	L_x	0	0	$\frac{H}{2}D_z$	$-\frac{H}{2}D_y$	$-\frac{H}{2}D_t$	0	0
M^r_y	M^r_z	0	$-M^r_x$	0	$\frac{H}{2}P_r$	0	$-M^s_y$	L_y	0	$-\frac{H}{2}D_z$	0	$\frac{H}{2}D_x$	0	$-\frac{H}{2}D_t$	0
M^r_z	$-M^r_y$	M^r_x	0	0	0	$\frac{H}{2}P_r$	$-M^s_z$	L_z	0	$\frac{H}{2}D_y$	$-\frac{H}{2}D_x$	0	0	0	$-\frac{H}{2}D_t$
M^s_x	0	$-M^s_z$	M^s_y	$\frac{H}{2}P_s$	0	0	$-M^r_x$	0	L_x	$\frac{H}{2}D_t$	0	0	0	$\frac{H}{2}D_z$	$-\frac{H}{2}D_y$
M^s_y	M^s_z	0	$-M^s_x$	0	$\frac{H}{2}P_s$	0	$-M^r_y$	0	L_y	0	$\frac{H}{2}D_t$	0	$-\frac{H}{2}D_z$	0	$\frac{H}{2}D_x$
M^s_z	$-M^s_y$	M^s_x	0	0	0	$\frac{H}{2}P_s$	$-M^r_z$	0	L_z	0	0	$\frac{H}{2}D_t$	$\frac{H}{2}D_y$	$-\frac{H}{2}D_x$	0

Wie man sieht, liefert das Bilden der Poissonklammern, obwohl das denkbar wäre, keine neuen Integrale mehr, sondern Linearkombinationen der alten (genauer sogar nur Vielfache). Damit aber erzeugen die fünfzehn Integrale eine Lie-Algebra von der Dimension 15 . Als Basiselemente kann man die fünfzehn Integrale nehmen. Die Lie-Algebra (Tabelle II) der klassischen Keplerbewegung ist als Unteralgebra darin enthalten, so daß wir also eine echte Erweiterung gefunden haben.

2. Identifikation der erweiterten Lie-Algebra

Die der klassischen Keplerbewegung entsprechende Teilalgebra besitzt eine Darstellung (57) durch reelle 4×4-Matrizen. Im elliptischen Fall $h<0$ können wir die Darstellung so wählen, daß die Algebra der elliptischen Keplerbewegung die 6-dimensionale Algebra der schiefsymmetrischen reellen 4×4-Matrizen wird, welche zur orthogonalen Gruppe O_4 gehört. Die erweiterte Algebra (Tabelle III) hat die Dimension 15 und enthält die Algebra der klassischen Keplerbewegung als Unteralgebra. Da die Algebra der spurfreien Matrizen die Algebra der schiefsymmetrischen Matrizen enthält und ebenfalls die Dimension 15 hat, liegt die Vermutung nahe, daß es sich bei der erweiterten Algebra vielleicht um diese Algebra der spurfreien Matrizen handeln könnte. Sie gehört zur Gruppe der reellen 4×4-Matrizen mit der Determinante 1 (unimodulare Gruppe oder spezielle lineare Gruppe SL_4). Die Vermutung ist in dieser Form aber falsch. An der Tabelle III sieht man nämlich, daß das Integral D_t mit allen D_a und L_a kommutiert. Eine Matrix aber, die mit allen Matrizen (57) kommutiert (kommutieren im Sinne der gewöhnlichen Matrizenmultiplikation bedeutet ja gerade das Verschwinden des Lie'schen Produkts [2]),ist, wie man leicht nachprüft, ein Vielfaches der Einheitsmatrix.

Und trotzdem verbirgt sich hinter der Tabelle III , und zwar nur im hyperbolischen Fall $H>0$ die Lie-Algebra der spurfreien Matrizen. Allerdings ist die Unteralgebra der schiefsymmetrischen Matrizen dann nicht mit der von den D_a, L_a gebildeten Unteralgebra identisch.

Auf diese Ergebnis kommt man durch folgende Betrachtung :
Die Integrale (88) und (90) sind schiefsymmetrische Bilinearformen in den vier Komponenten der kanonischen Variablen u und v ; man kann ihnen daher auf natürliche Weise eine reelle 4×4-Matrix zuordnen, nämlich die schiefsymmetrische Matrix der betreffenden Bilinearform

(92)
$$D_x=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\quad D_y=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\quad D_z=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$$
$$D_t=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\quad P_r=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\quad P_s=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ wird aus Gründen, die sogleich ersichtlich werden, angebracht. Bildet man nämlich die Lie'schen Produkte, d.h. die Kommutatoren je zweier dieser Matrizen, z.B.

$$\{D_x,D_y\}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=-D_z$$

so sieht man, daß stets die der Tabelle III entsprechenden Ergebnisse herauskommen.

Dadurch werden wir ermutigt, auch für die übrigen Integrale (89),(91) eine Darstellung durch 4×4-Matrizen zu finden. Wir versuchen zunächst, die L_a zu bestimmen, dabei gehen wir von der Tatsache aus, daß diese mit D_t kommutieren müssen. Die allgemeinste Matrix, deren Lie'sches Produkt mit D_t verschwindet, ist von der Form

$$(93)\qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & a_{11} & -a_{14} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ -a_{32} & a_{31} & -a_{34} & a_{33} \end{pmatrix} .$$

Wenn sie außerdem noch mit D_x kommutiert, muß sie die Form

$$(94)\qquad \begin{pmatrix} a_{x1} & a_{x2} & a_{x3} & a_{x4} \\ -a_{x2} & a_{x1} & -a_{x4} & a_{x3} \\ a_{x3} & a_{x4} & a_{x1} & a_{x2} \\ -a_{x4} & a_{x3} & -a_{x2} & a_{x1} \end{pmatrix}$$

haben. Und analog haben mit D_y bzw. D_z kommutierende Matrizen (93) das Aussehen

$$(95)\qquad \begin{pmatrix} a_{y1} & a_{y2} & a_{y3} & a_{y4} \\ -a_{y2} & a_{y1} & -a_{y4} & a_{y3} \\ -a_{y3} & -a_{y4} & a_{y1} & a_{y2} \\ a_{y4} & -a_{y3} & -a_{y2} & a_{y1} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} a_{z1} & a_{z2} & 0 & 0 \\ -a_{z2} & a_{z1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{z3} & a_{z4} \\ 0 & 0 & -a_{z4} & a_{z3} \end{pmatrix} .$$

Wie man an der Tabelle III sieht, können nur die Matrizen der Linearkombinationen von D_x und L_x gleichzeitig mit D_x und D_t kommutieren, also die Form (94) haben, entsprechendes gilt für (95). Speziell ist also L_x von der Form (94), wenn überhaupt eine Darstellung für L_x existiert.
Die Produkte $\{L_x,D_y\} = -L_z$, $\{L_y,D_z\} = -L_x$, $\{L_z,D_x\} = -L_y$ liefern neue Bedingungen für die noch freien Parameter, z.B.

$$\left\{ L_x, D_y \right\} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -a_{x3} & -a_{x4} & a_{x1} & a_{x2} \\ a_{x4} & -a_{x3} & -a_{x2} & a_{x1} \\ -a_{x1} & -a_{x2} & a_{x3} & a_{x4} \\ a_{x2} & -a_{x1} & -a_{x4} & a_{x3} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{x3} & a_{x4} & a_{x1} & a_{x2} \\ -a_{x4} & a_{x3} & -a_{x2} & a_{x1} \\ -a_{x1} & -a_{x2} & -a_{x3} & -a_{x4} \\ a_{x2} & -a_{x1} & a_{x4} & -a_{x3} \end{pmatrix}$$

also

$$a_{x3} = a_{z1} = -a_{z3} = a$$

$$a_{x4} = a_{z2} = -a_{z4} = b$$

und analog

$$a_{x1} = a_{x2} = 0 \quad , \quad a_{y4} = a_{x3} \quad , \quad a_{y3} = -a_{x4}$$

$$\frac{1}{2} a_{z2} - \frac{1}{2} a_{z4} = -a_{y3} \; , \quad -\frac{1}{2} a_{z1} + \frac{1}{2} a_{z3} = -a_{y4} \; , \quad a_{y1} = a_{y2} = 0 \; ,$$

also haben wir noch zwei Parameter a, b frei :

$$(96) \quad L_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \\ a & b & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \end{pmatrix} , \; L_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b & a \\ 0 & 0 & -a & -b \\ b & -a & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \end{pmatrix} , \; L_z = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & -b \\ 0 & 0 & b & -a \end{pmatrix} .$$

Weiter muß gelten

$$\left\{ L_x, L_y \right\} = \frac{H}{2} D_z \qquad \text{usw.} \; ,$$

was

$$a\, b = 0 \quad \text{und} \quad 8(a^2 - b^2) = H$$

liefert.

Im Falle $a = 0$ werden die Matrizen (96) Vielfache der entsprechenden D_a, so daß die Darstellung entartet. Deshalb wählen wir $b = 0$, $a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{H}{2}}$ und beschränken uns auf den hyperbolischen Fall $H > 0$, damit die Darstellung reell bleibt. Man kann nun sehr schnell an Hand der Tabelle durch Bilden der Lie'schen Produkte die noch fehlenden Matrizen bestimmen.

Es ergibt sich dann

$$L_x = \sqrt{\frac{H}{8}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_y = \sqrt{\frac{H}{8}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_z = \sqrt{\frac{H}{8}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(97) \quad M_x^r = \sqrt{\frac{H}{8}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_y^r = \sqrt{\frac{H}{8}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_z^r = \sqrt{\frac{H}{8}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_x^s = \sqrt{\frac{H}{8}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_y^s = \sqrt{\frac{H}{8}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad M_z^s = \sqrt{\frac{H}{8}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Man kann sich nun davon überzeugen, daß die Kommutatoren dieser Matrizen stets die der Tabelle III entsprechenden Lie'schen Produkte liefern. Die fünfzehn Matrizen (92),(97) sind alle spurfrei und linear unabhängig. Wir haben also im Falle $H > 0$ eine echte reelle Darstellung der erweiterten Lie-Algebra, die dann mit der Lie-Algebra der unimodularen Gruppe SL_4 identisch ist.

Selbstverständlich gilt diese Darstellung auch für den elliptischen Fall $H < 0$, nur ist sie dann nicht mehr reell.

L E B E N S L A U F

Am 17. Januar 1943 wurde ich als Sohn des Geologen Dr.Alfred Mayer-Gürr und seiner Ehefrau Gertrud geb. Rathmann in Laichingen/ Württemberg geboren. Die Volksschule besuchte ich in der Nähe von Hannover von 1949 bis zum Eintritt ins Gymnasium im Jahre 1953 . Meine Reifeprüfung legte ich im Februar 1962 am mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig der Bismarckschule Hannover ab. Danach begann ich mit dem Studium der Mathematik und Physik an der Technischen Hochschule Stuttgart, wo ich bis zum Ablegen der Vordiplomprüfung im Herbst 1964 blieb. Mein Studium setzte ich fort an der Freien Universität Berlin und bestand dort mit einer Arbeit über Variationsrechnung am 22. Dezember 1967 die Diplomprüfung in Mathematik. Auf Anregung von Prof. F. Hinderer erhielt ich eine Doktorarbeit über die von Prof. P. Kustaanheimo entwickelte Spinorregularisierung. Durch ein Stipendium der finnischen Regierung wurde es mir möglich, als Austauschstudent zwei Semester lang in Helsinki bei Prof. Kustaanheimo persönlich zu studieren, wodurch meine Kenntnisse der Spinorrechnung wesentlich vertieft wurden.

Jürgen Mayer-Gürr